«LE MATEMATICHE»
Vol. XLII (1987) - Fasc. I-II, pp. 87-108

SULLA REGOLARITÀ L^p DELLE SOLUZIONI DEI SISTEMI PARABOLICI NON LINEARI DI ORDINE SUPERIORE AD ANDAMENTO QUADRATICO

GIOVANNA IDONE (Reggio Calabria) (*) (**)

We show an L^p_{loc}-regularity result of the solutions to non linear parabolic systems of the type

$$\sum_{|\alpha|=m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a^\alpha(X, Du) + \frac{\partial u}{\partial t} = a^0(X, Du),$$

assuming that the coefficients a^α and a^0 fulfil the following growth conditions

$$\|a^\alpha(X, Du)\| \le c_\alpha \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\| + 1 \right), |\alpha| = m$$

$$\|a^0(X, Du)\| \le a \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^2 + b.$$

To reach this result a «Caccioppoli type» inequality plays an essential role.

(*) Entrato in Redazione il 16 novembre 1988

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R. e con contributo finanziario del M.P.I.

1. Introduzione.

Lo scopo di questo lavoro è di dimostrare alcuni risultati preliminari allo studio della regolarità hölderiana e quasi hölderiana delle soluzioni dei sistemi parabolici non lineari ad andamento quadratico di ordine superiore.

I risultati più rilevanti sono costituiti dalla disuguaglianza di Caccioppoli e dalla regolarità L^p_{loc} delle soluzioni dei predetti sistemi parabolici.

Nel caso di sistemi parabolici del secondo ordine ad andamento quadratico, la parziale regolarità hölderiana è stata affrontata, tra gli altri, da M. Giaquinta - M. Struwe [2] e da M. Marino - A. Maugeri [3].

I problemi ancora aperti, nel caso dei sistemi di ordine superiore, saranno oggetto di successivi lavori.

Diamo adesso le principali notazioni ed ipotesi.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera $\partial\Omega$ sufficientemente regolare, sia T un numero reale positivo e Q il cilindro $\Omega \times (-T, 0)$.

Se indichiamo con $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un punto di $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$ e con t un numero reale, porremo $X = (x, t)$ e $X^0 = (x^0, t^0)$.

Indicheremo con $B(x^0, \sigma)$ e $Q(X^0, \sigma)$, con $\sigma > 0$, i seguenti insiemi

$$B(x^0, \sigma) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^0\| < \sigma\}$$

$$Q(X^0, \sigma) = B(x^0, \sigma) \times (t^0 - \sigma^{2m}, t^0)$$

e diremo che $Q(X^0, \sigma \subset\subset Q$ se $B(x^0, \sigma) \subset\subset \Omega$ e $\sigma^{2m} < t^0 + T \leq T$, (con $m \geq 1$).

Se $u : Q \to \mathbb{R}^N$, (N intero > 1) scriveremo

$$Du = (\delta u,\ \{D^\alpha u\}_{|\alpha|=m}),\ \delta u = \{D^\alpha u\}_{|\alpha|<m}.$$

Se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ è un multiindice, porremo, come è usuale, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$; indicheremo con $\mathcal{R}, \mathcal{R}^*, \mathcal{R}^{**}$ i prodotti cartesiani

$\prod_{|\alpha|<m} \mathbb{R}^N_\alpha$, $\prod_{|\alpha|=m} \mathbb{R}^N_\alpha$, $\prod_{|\alpha|\leq m} \mathbb{R}^N_\alpha$ e con $p'' = \{p^\alpha\}_{0\leq|\alpha|<m}$, $p' = \{p^\alpha\}_{|\alpha|=m}$, $p = \{p^\alpha\}_{0\leq|\alpha|\leq m} = (p'', p')$ punti rispettivamente di $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^*$ ed $\mathcal{R}^{**}$.

I simboli $(\cdot|\cdot)_k$ e $||\cdot||_k$ denoteremo il prodotto scalare e la norma in $\mathbb{R}^k$ rispettivamente. Ometteremo l'indice k quando non ci sarà pericolo di equivoco.

Consideriamo in Q il seguente sistema non lineare di ordine $2m$ di tipo variazionale:

$$\sum_{|\alpha|=m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a^\alpha(X, Du) + \frac{\partial u}{\partial t} = a^0(X, Du), \tag{1.1}$$

dove $a^\alpha(X,p)$ con $|\alpha| \leq m$ sono vettori di R^N definiti in $\Lambda = Q \times \mathcal{R}^{**}$, misurabili in X, continui in p e soddisfacenti le seguenti condizioni:

(1.2) le applicazioni $p' \to a^\alpha(X,p)$ $|\alpha| = m$ sono differenziabili, con derivate $\dfrac{\partial a^\alpha}{\partial p_k^\beta}$ misurabili in X, continue in p e limitate in Λ:

$$\left\{ \sum_{h,k=1}^N \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \left| \frac{\partial a_h^\alpha(X,p)}{\partial p_k^\beta} \right|^2 \right\}^{1/2} \leq M, \quad \forall (X,p) \in \Lambda$$

(1.3) il sistema (1.1) è fortemente parabolico, cioè esiste $\nu > 0$ tale che

$$\sum_{h,k=1}^N \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \frac{\partial a_h^\alpha(X,p)}{\partial p_k^\beta} \xi_h^\alpha \xi_k^\beta > \nu \sum_{|\alpha|=m} ||\xi^\alpha||_N^2 \quad \forall (X,p) \in \Lambda$$

e per ogni sistema $\{\xi^\alpha\}_{|\alpha|=m}$ di vettori di $\mathbb{R}^N$.

(1.4) i vettori a^α hanno i seguenti andamenti: esistono i numeri reali a, b, $c^\alpha |\alpha| = m$, con a, $c^\alpha > 0$ e $b \geq 0$ tali che

$$||a^0(X,p)|| \leq a||p'||^2 + b$$

$$||a^\alpha(X,p)|| \leq c^\alpha(||p'|| + 1) \text{ per } |\alpha| = m \ \forall (X,p) \in \Lambda.$$

Supponiamo inoltre, il che non è riduttivo, che

$$a_\alpha^h(X, \delta u, 0), \ |\alpha| = m, \ h = 1, \dots, N.$$

Se con $A_{\alpha\beta}(X,p)$ $|\alpha| = m$ $|\beta| = m$ denotiamo le matrici $N \times N$ misurabili in X, continue in p, limitate in Ω, ottenute ponendo

$$A_{\alpha\beta} = \{A^{hk}_{\alpha\beta}\}|\alpha| = m,\ |\beta| = m,\ h,k = 1,2,\dots,N. \tag{1.5}$$

con $A^{kk}_{\alpha\beta}(X,p) = \int_0^1 \frac{\partial a^\alpha_h(X,\partial u,\tau p')}{\partial p^\beta_k} d\tau$, si avrà $a^\alpha(X,p) = \sum_{|\beta|=m} A_{\alpha\beta}p^\beta$ per $|\alpha| = m$ e il sistema (1.1) potrà scriversi

$$\sum_{|\alpha|=m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(\sum_{|\beta|=m} A_{\alpha\beta}(X,Du)D^\beta u \right) + \frac{\partial u}{\partial t} = a^0(X,Du). \tag{1.6}$$

Denotati con $H^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, k intero ≥ 0, $p \geq 1$, gli usuali spazi di Sobolev di vettori $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$, (se $p = 2$ scriveremo semplicemente $H^k(\Omega, \mathbb{R}^N)$), chiameremo soluzione del sistema (1.1) un vettore $u \in L^2(-T, 0, H^m(\Omega, \mathbb{R}^N)) \cap C^0([-T,0], L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N))$ tale che

$$\int_Q \left\{ \sum_{|\alpha|=m} (a^\alpha | D^\alpha \varphi) - \left(u | \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right\} dX = \int_Q a^0 | \varphi dX, \tag{1.7}$$

ovvero, utilizzando la scrittura (1.6)

$$\int_Q \sum_{|\alpha|=m} \left(\sum_{|\beta|=m} A_{\alpha\beta} D^\beta u | D^\alpha \varphi \right) dX - \int_Q u | \frac{\partial \varphi}{\partial t} dX = \int_Q a^0 | \varphi dX \tag{1.8}$$

$$\forall \varphi \in C^\infty_0(Q, \mathbb{R}^N).$$

Nel numero 2 dimostreremo alcuni lemmi ausiliari; nel numero 3, richiedendo che sia verificata un opportuna condizione di «piccolezza», (v. lemma 3.I), dimostreremo una disuguaglianza di tipo «Caccioppoli» ed il risultato di regolarità L^p_{loc} per le derivate di ordine massimo con $p \in (2, \bar{s})$.

2. Lemmi preliminari.

LEMMA 2.I. *Se* $u \in L^2(t^0 - (2\sigma)^{2m},\ t^0,\ H^m(B(x^0, 2\sigma), \mathbb{R}^N))$ *e se* $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *con* $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi = 1$ *in* $B(0,1)$, $\chi = 0$ *in* $\mathbb{R}^n/B(0,2)$, $\underset{|\alpha|\leq m}{|\mathrm{grad}^{|\alpha|}}\ \chi(x)| \leq 2$, *allora*

$$\int_{Q(X^0,2\sigma)} \|u - \tilde{u}_{x^0,2\sigma}\|^2 dX \leq c \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2j} \int_{Q(X^0,2\sigma)} \|D^\alpha u\|^2 dx dt \tag{2.1}$$

dove

$$\tilde{u}_{x^0,2\sigma} = \int_{B(x^0,2\sigma)} \chi^{2m}_{x^0,2\sigma}(x) u(X) dx \Big| \int_{B(x^0,2\sigma)} \chi^{2m}_{x^0,2\sigma}(x) dx,$$

$$\chi^{2m}_{x^0,2\sigma} = \chi\left(\frac{x - x^0}{\sigma}\right),$$

e c *indipendente da* σ *e da* X^0.

Dimostrazione.

$$\int_{Q(X^0,2\sigma)} \|u - \tilde{u}_{x^0,2\sigma}(t)\|^2 dX \leq$$

$$\leq \frac{1}{\left(\int_{B(x^0,2\sigma)} \chi^{2m}_{x^0,\sigma}(y) dy\right)^2} \int_{Q(X^0,2\sigma)} dx dt \left(\int_{B(x^0,2\sigma)} \|u(x,t) - u(y,t)\|^2 dy \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \int_{B(x^0,2\sigma)} \chi^{4m}_{x^0,2\sigma}(y) dy\right) \leq$$

$$\leq c \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \frac{\sigma^{2j}}{\int_{B(x^0,2\sigma)} \chi^{2m}_{x^0,2\sigma}(y) dy} \int_{Q(X^0,2\sigma)} dx dt \int_{B(x^0,2\sigma)} \|D^\alpha u\|^2 dy$$

da cui, tenendo presente che

$$\sigma^n \operatorname{mis} B(0,1) \leq \int_{B(x^0,2\sigma)} \chi^{2m}_{x^0,2\sigma}(y) dy$$

segue la (2.1).

Valgono poi i seguenti ben noti teoremi.

LEMMA 2.II. *Se* $u \in H^{m,q}(B(x^0, 2\sigma), \mathbb{R}^N)$ *e se* $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *con* $0 \le \chi \le 1$, $\chi = 1$ *in* $B(0,1)$, $\chi = 0$ *in* $\mathbb{R}^n \setminus B(0,2)$, $\underset{|\alpha| \le m}{|\mathrm{grad}^{|\alpha|} \chi(x)|} \le 2$, *allora*

$$\int_{B(x^0,2\sigma)} ||u(x) - \tilde{u}_{x^0,2\sigma}(t)||^q dx \le \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} c\sigma^{jq} \int_{B(x^0,2\sigma)} ||D^\alpha u||^q dx$$

$$se\ 1 \le q < +\infty$$

$$\int_{B(x^0,2\sigma)} ||u(x) - \tilde{u}_{x^0,2\sigma}(t)||^{q^*} dx \le c^* \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{j-m} \left(\int_{B(x^0,2\sigma)} ||D^\alpha u||^q dx \right)^{q^*/q}$$

$$se\ 1 \le q < \frac{n}{m}$$

dove

$$q^* = \frac{nq}{n - qm}, \tilde{u}_{x^0,2\sigma} = \int_{B(x^0,2\sigma)} \chi^{2m}_{x^0,2\sigma}(x) u(x) dx \Big/ \int_{B(x^0,2\sigma)} \chi^{2m}_{x^0,2\sigma}(x) dx$$

$\chi^{2m}_{x^0,2\sigma}(x) = \chi\left(\dfrac{x - x^0}{\sigma}\right)$, *c e* c^* *costanti indipendenti da* σ *e da* x^0.

Ricordiamo infine il seguente lemma (vedi [1] e [2]):

LEMMA 2.III. *Se* g *è una funzione non negativa nel cilindro* Q *con*

$$g \in L^r(Q)\ r > 1$$

e se, per ogni $Q(X^0, \sigma) \subset Q(X^0, 4\sigma) \subset Q$ *con* $\sigma \le 1$(1),

$$\fint_{Q(X^0,\sigma)} g^r dX \le c \left(\fint_{Q(X^0,4\sigma)} g\, dX \right)^r + \vartheta \fint_{Q(X^0,4\sigma)} g^r dX,$$

$$c > 1,\ 0 \le \vartheta < 1$$

---

(1)

$$\fint_{Q(X^0,\sigma)} f(X) dX = \frac{1}{\mathrm{mis} Q(X^0, \sigma)} \int_{Q(X^0,\sigma)} f(X) dX$$

allora esiste un $\varepsilon > 0$ *per cui* $g \in L^p_{\mathrm{loc}}(Q)$, $\forall p \in [r, r+\varepsilon)$ *e per ogni* $Q(X^0,\sigma) \subset Q(X^0,4\sigma) \subset Q$ *con* $\sigma \leq 1$, *si ha*

$$\left(\int\!\!\!\!\!\!-_{Q(X^0,\sigma)} g^p dX\right)^{1/p} \leq K \left(\int\!\!\!\!\!\!-_{Q(X^0,4\sigma)} g^r dX\right)^{1/r}.$$

3. Regolarità L^p_{locale}.

Prima di dimostrare il teorema di regolarità L^p_{locale} premettiamo alcuni lemmi.

LEMMA 3.I (disuguaglianza di «Caccioppoli»). *Se* $u \in L^2(-T,0, H^m(\Omega,\mathbb{R}^N)) \cap C^0([-T,0], L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N))$ *è una soluzione del sistema (1.1), se valgono le ipotesi (1.2), (1.3), (1.4) e se* $2a \sup_Q ||u|| < \nu$, *allora,* $\forall Q(X^0,\sigma) \subset\subset Q(X^0,2\sigma) \subset\subset Q$ *con* $\sigma \leq 2$ *si ha:*

$$\sup_{(t^0-\sigma^{2m},t^0)} \int_{B(x^0,\sigma)} ||u(x,\tau) - \tilde{u}_{x^0,2\sigma}(\tau)||^2 dx + \tag{3.1}$$

$$+ \sum_{|\alpha|=m} \int_{Q(X^0,\sigma)} ||D^\alpha u||^2 dX \leq c \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2(j-m)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \int_{Q(X^0,2\sigma)} ||D^\alpha u(x,t) - \tilde{u}_{x^0,2\sigma}(t)||^2 dX + \sigma^{n+2m} \right\}$$

dove $\tilde{u}_{x^0,2\sigma}(t)$ *è la funzione definita nell'enunciato del Lemma 2.I, c dipende da* $\sup_Q ||u||$, *ma non da* σ *e* X^0.

Dimostrazione. Fissati $Q(X^0,2\sigma) \subset\subset Q$, $\sigma \leq 2$, $t^0 - \sigma^{2m} < \tau \leq t^0$ e $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi = 1$ in $B(0,1)$ $\chi = 0$ in $\mathbb{R}^n \backslash B(0,2)$, $|\mathrm{grad}^{|\alpha|}_{|\alpha|\leq m} \chi(x)| \leq 2$, sia $\rho_n(t)$, n intero $> \dfrac{2}{\tau - t^0 + \sigma^{2m}}$ la funzione reale definita in $\mathbb{R}$ dalla legge

$$
(3.2)\qquad \begin{cases} \rho_n(t) = 1 \text{ per } t^0 - \sigma^{2m} \leq t \leq \tau - \dfrac{2}{n} \\ \rho_n(t) = 0 \text{ per } t \geq \tau - \dfrac{1}{n} \text{ e per } t \leq t^0 - (2\sigma)^{2m} \\ \rho_n(t) = \dfrac{t - t^0 + (2\sigma)^{2m}}{(2^{2m} - 1)\sigma^{2m}} \text{ per } t^0 - (2\sigma)^{2m} < t < t^0 - \sigma^{2m} \\ \rho_n(t) = -n(t - \tau) - 1 \text{ per } \tau - \dfrac{2}{n} < t < \tau - \dfrac{1}{n} \end{cases}
$$

Sia poi $\{g_s(t)\}$ una successione di regolarizzanti simmetriche

$$
(3.3)\qquad \begin{cases} g_s(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ g_s(t) \geq 0,\ g_s(t) = g_s(-t) \\ \operatorname{supp} g_s \subset \left[-\dfrac{1}{s}, \dfrac{1}{s}\right] \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_s(t)dt = 1. \end{cases}
$$

Assumiamo per ogni $s > \left\{n \dfrac{1}{T + t^0 - (2\sigma)^{2m}}\right\}$

$$
\varphi(X) = \chi^{2m}_{x^0,2\sigma}(x)\rho_n(t)[(\rho_n(t)(u - \tilde{u}_{x^0,2\sigma})) * g_s(t)];
$$

avremo quindi dalla (1.8), tenendo presente che

$$
D^\alpha\varphi(X) = \rho_n \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^\gamma \chi^{2m}_{x^0,2\sigma} D^{\alpha-\gamma}\{\rho_n(t)[(\rho_n(t)(u - \tilde{u}_{x^0,2\sigma})) * g_s(t)]\}
$$

e che, per simmetria della funzione $g_s(t)$,

$$
\int_Q \{u|\chi^{2m}_{x^0,2\sigma}(x)\rho_n[(\rho_n(u - \tilde{u}_{x^0,2\sigma})) * g_s(t)]'\}dX = 0,
$$

$$
(3.4)\qquad \int_Q \rho_n \left\{ \sum_{|\alpha|=m} (\sum_{|\beta|=m} A_{\alpha\beta}(X, Du)D^\beta u| \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^\gamma \chi^{2m}_{x^0,2\sigma}(x) \cdot \right.
$$

$$\cdot D^{\alpha-\gamma}[(\rho_n(u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}))*g_s(t)]\}\,dX-\int_Q\{u|\chi^{2m}_{x^0,2\sigma}(x)\rho'_n(t)\cdot$$

$$\cdot[(\rho_n(t)(u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}))*g_s(t)]\}dX=$$

$$\int_Q(a^0(X,Du)|\chi^{2m}_{x^0,2\sigma}(x)\rho_n(t)[(\rho_n(t)(u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}))*g_s(t)])dX.$$

Facendo il limite per $s\to+\infty$ si ottiene

$$\int_Q\rho_n^2\sum_{|\alpha|=m}\sum_{|\beta|=m}\left(A_{\alpha\beta}(X,Du)D^\beta u|\sum_{\gamma\le\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}D^\gamma\chi^{2m}_{x^0,2\sigma}D^{\alpha-\gamma}(u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma})\right)dX-$$

$$-\int_Q(u|\chi^{2m}_{x^0,2\sigma}\rho'_n(t)\rho_n(t)(u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}))dX=$$

$$=\int_Q(\rho_n^2a^0(X,Du)|\chi^{2m}_{x^0,2\sigma}(u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}))dX;$$

ovvero

$$A=\int_Q\left(\rho_n^2\chi^{2m}_{x^0,2\sigma}\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}A_{\alpha\beta}(X,Du)D^\beta u|D^\alpha u\right)dX= \tag{3.5}$$

$$=-\int_Q\left[\rho_n^2\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}\sum_{0<\gamma\le\alpha}\left(A_{\alpha\beta}(X,Du)D^\beta u|\binom{\alpha}{\gamma}D^\gamma\chi^{2m}_{x^0,2\sigma}D^{\alpha-\gamma}(u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma})\right)\right]dX+$$

$$+\int_Q(u|\chi^{2m}_{x^0,2\sigma}\rho_n\rho'_n(u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}))dX+\int_Q\rho_n^2(a^0(X,Du)|\chi^{2m}_{x^0,2\sigma}(u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}))dX=$$

$$=B+C+D.$$

Per la (1.3) possiamo scrivere

$$A\ge\nu\int_{t^0-(2\sigma)^{2m}}^{T-\frac{1}{n}}dt\int_{B(x^0,2\sigma)}\chi^{2m}_{x^0,2\sigma}\rho_n^2\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha u\|^2dx. \tag{3.6}$$

Dall'ipotesi (1.2) abbiamo, per ogni $\varepsilon > 0$:

$$|B| \leq K \int_Q \rho_n^2 \left(\sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u|| \left| \sum_{|\alpha|=m} \sum_{0<\gamma\leq\alpha} \frac{\chi_{x^0,2\sigma}^{2m-|\gamma|}}{\sigma^{|\gamma|}} \cdot \right.\right. \tag{3.7}$$

$$\cdot ||D^{\alpha-\gamma}(u - \tilde{u}_{x^0,2\sigma})||\Big) \, dX \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_{t^0-(2\sigma)^{2m}}^{\tau-\frac{1}{n}} dt \int_{B(x^0,2\sigma)} \rho_n^2 \chi_{x^0,2\sigma}^{2m} \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u||^2 dx +$$

$$+ c(\varepsilon) \int_{t^0-(2\sigma)^{2m}}^{\tau-\frac{1}{n}} dt \int_{B(x^0,2\sigma)} \left(\rho_n^2 \sum_{|\alpha|=m} \sum_{0<\gamma\leq\alpha} \frac{\chi_{x^0,2\sigma}^{2m-2|\gamma|}}{\sigma^{2|\gamma|}} \cdot \right.$$

$$\cdot ||D^{\alpha-\gamma}(u - \tilde{u}_{x^0,2\sigma})||\Big) \, dx.$$

Per maggiore l'integrale C osserviamo che:

$$\rho_n(t)\rho_n'(t) \begin{cases} = 0 \text{ se } t < t^0 - (2\sigma)^{2m};\, t^0 - \sigma^{2m} < t < \tau - \frac{2}{n};\, t > \tau - \dfrac{1}{n} \\ \leq \dfrac{1}{(2^{2m}-1)\sigma^{2m}} \text{ per } t^0 - (2\sigma)^{2m} \leq t < t^0 - \sigma^{2m} \\ \leq -\dfrac{n}{2} \text{ per } \tau - \dfrac{2}{n} < t < \tau - \dfrac{3}{2n} \\ \leq 0 \text{ per } \tau - \dfrac{3}{2n} \leq t \leq \tau - \dfrac{1}{n}; \end{cases}$$

per cui abbiamo[2]

$$C = \int_{t^0-(2\sigma)^{2m}}^{t^0-\sigma^{2m}} \rho_n \rho_n' dt \int_{B(x^0,2\sigma)} \chi_{x^0,2\sigma}^{2m} ||u - \tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^2 dx + \tag{3.8}$$

---

(2)

$$\int_{B(x^0,2\sigma)} \chi_{x^0,2\sigma}^{2m} (u - \tilde{u}_{x^0,2\sigma}) dx = 0 \quad \text{q.o. in} \quad \left(t^0 - (2\sigma)^{2m},\ \tau - \frac{1}{n} \right)$$

$$+\int_{\tau-\frac{2}{n}}^{\tau-\frac{3}{2n}} \rho_n\rho_n' dt \int_{B(x^0,2\sigma)} \chi_{x^0,2\sigma}^{2m} ||u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^2 dx +$$

$$+\int_{\tau-\frac{3}{2n}}^{\tau-\frac{1}{n}} \rho_n\rho_n' dt \int_{B(x^0,2\sigma)} \chi_{x^0,2\sigma}^{2m} ||u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^2 dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2^{2m}-1)\sigma^{2m}} \int_{t^0-(2\sigma)^{2m}}^{t^0-\sigma^{2m}} dt \int_{B(x^0,2\sigma)} ||u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^2 dx -$$

$$-\frac{n}{2}\int_{\tau-\frac{2}{n}}^{\tau-\frac{3}{2n}} dt \int_{B(x^0,2\sigma)} \chi_{x^0,2\sigma}^{2m} ||u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^2 dx.$$

Tenendo presente la (1.4) possiamo così maggiorare D:

$$(3.9) \qquad |D| \leq a\int_{t^0-(2\sigma)^{2m}}^{\tau-\frac{1}{n}} dt \int_{B(x^0,2\sigma)} \chi_{x^0,2\sigma}^{2m}\rho_n^2 \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u||^2 ||u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}|| dx +$$

$$+b\int_{t^0-(2\sigma)^{2m}}^{\tau-\frac{1}{n}} dt \int_{B(x^0,2\sigma)} \chi_{x^0,2\sigma}^{2m}\rho_n^2 ||u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^2 dx \leq$$

$$\leq 2a\sup_Q ||u|| \int_{t^0-(2\sigma)^{2m}}^{\tau-\frac{1}{n}} dt \int_{B(x^0,2\sigma)} \chi_{x^0,2\sigma}^{2m}\rho_n^2 \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u||^2 dx +$$

$$+\frac{c(\varepsilon)}{\sigma^{2m}} \int_{t^0-(2\sigma)^{2m}}^{\tau-\frac{1}{n}} dt \int_{B(x^0,2\sigma)} \chi_{x^0,2\sigma}^{2m}\rho_n^2 ||u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^2 dx + \varepsilon\sigma^{n+4m}.$$

Ora, scegliendo $\varepsilon = \frac{1}{2}\ (\nu - 2a\sup_Q ||u||)$, tenendo presente le (3.6), (3.7), (3.8), (3.9), dalla (3.5) abbiamo

$$\frac{n}{2}\int_{\tau-\frac{2}{n}}^{\tau-\frac{3}{2n}} dt \int_{B(x^0,2\sigma)} \chi_{x^0,2\sigma}^{2m} ||u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^2 dx +$$

$$+\left(\frac{\nu}{2} - a\sup_Q ||u||\right) \int_{t^0-(2\sigma)^{2m}}^{\tau-\frac{1}{n}} dt \int_{B(x^0,2\sigma)} \chi_{x^0,2\sigma}^{2m}\rho_n^2 \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u||^2 dx \leq$$

$$+\frac{c(\varepsilon)}{\sigma^{2m}}\int_{t^0-(2\sigma)^{2m}}^{\tau-\frac{1}{n}}||u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^2dt+$$

$$+c(\varepsilon)\sum_{|\alpha|=m}\sum_{0<\gamma<\alpha}\int_{t^0-(2\sigma)^{2m}}^{\tau-\frac{1}{n}}dt\int_{B(x^0,2\sigma)}\rho_n^2\frac{\chi_{x^0,2\sigma}^{2m-2|\gamma|}}{\sigma^{2|\gamma|}}\cdot$$

$$\cdot||D^{\alpha-\gamma}(u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma})||^2dx+c\sigma^{n+2m}.$$

Facendo ora tendere $n\to+\infty$, per quasi tutti i valori di $\tau\in(t^0-\sigma^{2m},t^0)$, abbiamo

$$\frac{1}{4}\int_{B(x^0,\sigma)}||u(x-\tau)-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}(\tau)||^2dx+\left(\frac{\nu}{2}-a\sup_Q||u||\right)\cdot \tag{3.10}$$

$$\cdot\int_{t^0-\sigma^{2m}}^{\tau}dt\int_{B(x^0,\sigma)}\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha u||^2dx\le$$

$$\le c\sum_{|\alpha|=m}\sum_{0<\gamma\le\alpha}\int_{t^0-(2\sigma)^{2m}}^{t^0}dt\int_{B(x^0,2\sigma)}\frac{||D^{\alpha-\gamma}(u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma})||^2}{\sigma^{2|\gamma|}}dx+c\sigma^{n+2m}.$$

Nella (3.10), trascurando dapprima il primo addendo, poi il secondo, si ottengono le seguenti disuguaglianze:

$$\int_{Q(X^0,\sigma)}\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha u||^2dX\le \tag{3.11}$$

$$\le c\sum_{|\alpha|=m}\sum_{0<\gamma\le\alpha}\int_{Q(X^0,\sigma)}\frac{||D^{\alpha-\gamma}(u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma})||^2}{\sigma^{2|\gamma|}}dX+c'\sigma^{n+2m}.$$

$$\sup_{(t^0-\sigma^{2m},t^0)}\int_{B(x^0,\sigma)}||u(x-\tau)-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^2dx\le \tag{3.12}$$

$$\le c\left\{\sum_{|\alpha|=m}\sum_{0<\gamma\le\alpha}\int_{Q(x^0,2\sigma)}\frac{||D^{\alpha-\gamma}(u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma})||^2}{\sigma^{2|\gamma|}}dX+\sigma^{n+2m}\right\}$$

dalle quali si ottiene

$$\sup_{(t^0-\sigma^{2m},t^0)}\int_{B(x^0,\sigma)} ||u(x-\tau)-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}(\tau)||^2 dx + \int_{Q(x^0,\sigma)} \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u||^2 dX \leq$$
$$\leq c\left\{\sum_{|\alpha|=m}\sum_{0<\gamma\leq\alpha}\int_{Q(X^0,2\sigma)} \frac{||D^{\alpha-\gamma}(u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma})||^2}{\sigma^{2|\gamma|}} dX + \sigma^{n+2m}\right\}$$

che possiamo scrivere nella forma:

$$\sup_{(t^0-\sigma^{2m},t^0)}\int_{B(x^0,\sigma)} ||u(x-\tau)-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}(\tau)||^2 dx + \int_{Q(X^0,\sigma)} \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u||^2 dX \leq$$
$$\leq c\left\{\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{2(j-m)}\int_{Q(X^0,2\sigma)} ||D^\alpha(u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma})||^2 dX + \sigma^{n+2m}\right\}$$

ed abbiamo quindi la tesi.

Ci sarà utile il seguente lemma, la cui dimostrazione si può ottenere ricalcando quella del lemma 3.II di [3].

LEMMA 3.II. *Se* $u \in L^2(-T, 0, H^m(\Omega, \mathbb{R}^N)) \cap C^0([-T,0], L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N))$ *è una soluzione del sistema (1.1), se valgono le ipotesi (1.2), (1.3), (1.4) e se* $2a \sup_Q ||u|| < \nu$, *allora per* $\forall Q(X^0,\sigma) \subset\subset Q(X^0, 4\sigma) \subset\subset Q$ *con* $\sigma \leq 1$, *si ha:*

$$\sup_{(t^0-2\sigma^{2m},t^0)}\int_{B(x^0,2\sigma)} ||u(x-\tau)-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}(\tau)||^2 dx \leq \tag{3.13}$$
$$\leq c\left\{\int_{Q(X^0,4\sigma)}\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{2j-2m}||D^\alpha u||^2 dX + \sigma^{n+2m}\right\}$$

dove $\tilde{u}_{x^0,2\sigma}(t)$ *è la funzione definita nel Lemma 2.I e c dipende dal* $\sup_Q ||u||$ *e non da* σ *e* X^0.

Osservazione.

Per il seguito ci sarà utile scrivere la (3.1) in una forma diversa, applicando la formula di Ehrling-Nirenberg-Gagliardo.

Infatti, avendosi

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{2(j-m)}\int_{Q(x^0,\sigma)}||D^\alpha(u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma})||^2dX \leq$$

$$\leq c\left\{\sup_{(t^0-\sigma^{2m},t^0)}\int_{B(x^0,\sigma)}||u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^2dx+\sum_{|\alpha|=m}\int_{Q(X^0,\sigma)}||D^\alpha u||^2dX\right\},$$

la (3.1) può scriversi così:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{2(j-m)}\int_{Q(X^0,\sigma)}||D^\alpha u||^2dX \leq \tag{3.14}$$

$$\leq c\left\{\sum_{j=0}^{m}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{2(j-m)}\int_{Q(X^0,2\sigma)}||D^\alpha(u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma})||^2dX+\sigma^{n+2m}\right\}$$

con c costante indipendente da σ e da X^0.

TEOREMA 3.1. *Se* $u\in L^2(-T,0,H^m(\Omega,\mathbb{R}^N))\cap C^0([-T,0],L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N))$ *è una soluzione del sistema (1.1), se valgono le ipotesi (1.2), (1.3), (1.4) e se* $2a\sup_Q||u||<\nu$, *allora esiste* $\bar{s}>2$ *tale che per* $\forall s\in(2,\bar{s})$

$$D^\alpha u\in L^s_{\mathrm{loc}}(Q,\mathbb{R}^N)\ \textit{per}\ |\alpha|=m. \tag{3.15}$$

Dimostrazione. Possiamo supporre $n>2m$ (poche modifiche occorrono per $n\leq 2m$).

Fissato $Q(X^0,\sigma)\subset\subset Q(X^0,4\sigma)\subset\subset Q$ con $\sigma\leq 1$, per il Lemma 3.II si ha

$$\int_{Q(X^0,2\sigma)}||u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^2dX\leq \tag{3.16}$$

$$\leq \sup_{(t^0-(2\sigma)^{2m},t^0)} \left(\int_{B(x^0,2\sigma)} ||u - \tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^2 dx\right)^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \int_{t^0-(2\sigma)^{2m}}^{t^0} dt \left(\int_{B(x^0,2\sigma)} ||u - \tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^2 dx\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq c \left\{ \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2(j-m)} \int_{Q(X^0,4\sigma)} ||D^\alpha u||^2 dX + \sigma^{n+2m} \right\}^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \int_{t^0-(2\sigma)^{2m}}^{t^0} dt \left\{ \int_{B(x^0,2\sigma)} ||u - \tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^2 dx \right\}^{1/2} .$$

Per q.o. $t \in (t^0 - (2\sigma)^{2m}, t^0)$, usando la disuguaglianza di Hölder, si ottiene

$$\int_{B(x^0,2\sigma)} ||u - \tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^2 dx \leq$$

$$\leq \left(\int_{B(x^0,2\sigma)} ||u - \tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^{2^*} dx\right)^{1/2^*} \left(\int_{B(x^0,2\sigma)} ||u - \tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^q dx\right)^{1/q}$$

con $q = \dfrac{2n}{n+2m}$ $(1 < q < 2)$ e $2^* = \dfrac{2n}{n-2m}$, da cui, tenendo presente il Lemma 2.II, si ha:

$$\int_{t^0-(2\sigma)^{2m}}^{t^0} dt \left(\int_{B(x^0,2\sigma)} ||u - \tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^2 dx\right)^{1/2} \leq \tag{3.17}$$

$$\leq \int_{t^0-(2\sigma)^{2m}}^{t^0} dt \left(\int_{B(x^0,2\sigma)} ||u - \tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^q dx\right)^{1/2q} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{B(x^0,2\sigma)} ||u - \tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^{2^*} dx\right)^{1/2\cdot 2^*} \leq$$

$$\leq c\sigma^{m/2} \left[\int_{t^0-(2\sigma)^{2m}}^{t^0} dt \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{q(j-m)} \int_{B(x^0,2\sigma)} ||D^\alpha u||^q dx\right)\right]^{1/2q} .$$

$$\cdot\left\{\int_{t^0-(2\sigma)^{2m}}^{t^0} dt\left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{2(j-m)}\int_{B(x^0,2\sigma)}||D^\alpha u||^2dx\right]^{\frac{q}{2(2q-1)}}\right\}^{\frac{2q-1}{2q}} \leq$$

$$\leq c\sigma^{m(\frac{3}{2}-\frac{m}{n})}\left[\int_{t^0-(2\sigma)^{2m}}^{t^0} dt\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{q(j-m)}\int_{B(x^0,2\sigma)}||D^\alpha u||^q dx\right)\right]^{1/2q}\cdot$$

$$\cdot\left[\int_{t^0-(2\sigma)^{2m}}^{t^0} dt\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{2(j-m)}\int_{B(x^0,2\sigma)}||D^\alpha u||^2dx\right)\right]^{1/4}.$$

Dalla (3.16) e (3.17) segue allora

$$\int_{Q(X^0,2\sigma)}||u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^2dX \leq c\sigma^{m(\frac{3}{2}-\frac{m}{n})}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{2(j-m)}\cdot\right.$$

$$\left.\int_{Q(X^0,4\sigma)}||D^\alpha u||^2dX+\sigma^{n+2m}\right)^{3/4}\left\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{q(j-m)}\int_{Q(X^0,2\sigma)}||D^\alpha u||^q dX\right\}^{1/2q}.$$

Usando la disuguaglianza di Caccioppoli si ha

$$\int_{Q(X^0,\sigma)}\left(1+\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{2(j-m)}||D^\alpha u||^2\right)dX \leq$$

$$\leq c\left[\sigma^{-2m}\int_{Q(X^0,2\sigma)}||u-\tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^2dX+\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{2(j-m)}\int_{Q(X^0,2\sigma)}||D^\alpha u||^2dX+\right.$$

$$\left.+\sigma^{n+2m}\right] \leq c\left[\sigma^{m(-\frac{1}{2}-\frac{m}{n})}\left\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{2(j-m)}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\cdot\int_{Q(X^0,4\sigma)}||D^\alpha u||^2dX+\sigma^{n+2m}\right)^{3/4}\left\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{q(j-m)}\int_{Q(X^0,2\sigma)}||D^\alpha u||^q dX\right\}^{1/2q}+$$

$$+\sigma^{m(-\frac{1}{2}-\frac{m}{n})}\left\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{2(j-m)}\int_{Q(X^0,2\sigma)}||D^\alpha u||^2dX+\sigma^{n+2m}\right\}^{3/4}.$$

$$\left. \cdot\, \sigma^{\frac{n+2m}{2q}} + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2(j-m)} \int_{Q(X^0,2\sigma)} ||D^\alpha u||^2 dX \right]$$

e quindi

$$\int_{Q(X^0,\sigma)} \left(1 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2(j-m)} ||D^\alpha u||^2 \right) dX \leq \tag{3.18}$$

$$\leq c \left[\left\{ \int_{Q(X^0,4\sigma)} \left(1 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2(j-m)} ||D^\alpha u||^2 \right) dX \right\}^{3/4} \cdot \right.$$

$$\cdot \left\{ \int_{Q(X^0,4\sigma)} \left[1 + \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2(j-m)} ||D^\alpha u||^2 \right)^{q/2} \right] dX \right\}^{1/2q} +$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2(j-m)} \int_{Q(X^0,2\sigma)} ||D^\alpha u||^2 dX \right]$$

ed anche, per ogni $\vartheta > 0$

$$\int_{Q(X^0,\sigma)} \left(1 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2(j-m)} ||D^\alpha u||^2 \right) dX \leq \tag{3.19}$$

$$\leq c \left\{ c(\vartheta) \left(\int_{Q(X^0,4\sigma)} \left[1 + \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2(j-m)} ||D^\alpha u||^2 \right)^{q/2} \right] dX \right)^{2/q} + \right.$$

$$+ \vartheta \left[\int_{Q(X^0,4\sigma)} \left(1 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2(j-m)} ||D^\alpha u||^2 \right) dX \right] +$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2(j-m)} \int_{Q(X^0,2\sigma)} ||D^\alpha u||^2 dX \right\}$$

Osserviamo adesso che dalla disuguaglianza di Ehrling-Nirenberg-

Gagliardo si ha

$$\int_{Q(X^0,2\sigma)} ||D^\alpha u||^2 dX \leq c\varepsilon^{m-|\alpha|} \int_{Q(X^0,2\sigma)} \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u||^2 dX +$$
$$\varepsilon^{-|\alpha|} \int_{Q(X^0,2\sigma)} ||u - \tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^2 dX \quad |\alpha| \leq m-1$$

e assumendo $\varepsilon = \sigma^2 \vartheta^{\frac{1}{m-|\alpha|}}$, si ricava

$$\sum_{j=1}^{m-1} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2(j-m)} \int_{Q(X^0,2\sigma)} ||D^\alpha u||^2 dX \leq c\vartheta \int_{Q(X^0,2\sigma)} \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u||^2 dX +$$
$$+\sigma^{-2m} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{|\alpha|=j} \vartheta^{\frac{-|\alpha|}{m-|\alpha|}} \int_{Q(X^0,2\sigma)} ||u - \tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^2 dX.$$

Allora maggiorando le derivate intermedie con tale espressione, si ha

$$\int_{Q(X^0,\sigma)} \left(1 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2(j-m)} ||D^\alpha u||^2\right) dX \leq$$
$$\leq c(\vartheta) \left[\int_{Q(X^0,4\sigma)} \left(1 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2(j-m)} ||D^\alpha u||^2\right)^{q/2} dX\right]^{2/q} +$$
$$+c\vartheta \left[\int_{Q(X^0,4\sigma)} \left(1 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2(j-m)} ||D^\alpha u||^2\right) dX\right] +$$
$$+c(\vartheta) \left(\sigma^{-2m} \int_{Q(X^0,2\sigma)} ||u - \tilde{u}_{x^0,2\sigma}||^2 dX\right)$$

ed anche per $\eta > 0$:

$$\int_{Q(X^0,\sigma)} \left(1 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2(j-m)} ||D^\alpha u||^2\right) dX \leq$$

$$\leq c(\vartheta)\left[\int_{Q(X^0,4\sigma)}\left(1+\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{2(j-m)}||D^\alpha u||^2\right)^{q/2}dX\right]^{2/q}+$$

$$+c\vartheta\left[\int_{Q(X^0,4\sigma)}\left(1+\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{2(j-m)}||D^\alpha u||^2\right)dX\right]+$$

$$+c(\vartheta)\cdot\eta\left[\int_{Q(X^0,4\sigma)}\left(1+\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{2(j-m)}||D^\alpha u||^2\right)dX\right]+$$

$$+c(\vartheta)\cdot c(\eta)\left[\int_{Q(X^0,4\sigma)}\left(1+\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{2(j-m)}||D^\alpha u||^2\right)^{q/2}dX\right]^{2/q}.$$

Scegliendo ora $\eta=\dfrac{\vartheta}{c(\vartheta)}$ otteniamo

$$\int_{Q(X^0,\sigma)}\left(1+\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{2(j-m)}||D^\alpha u||^2\right)dX\leq \tag{3.20}$$

$$\leq c(\vartheta)\left[\int_{Q(X^0,4\sigma)}\left(1+\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{2(j-m)}||D^\alpha u||^2\right)^{q/2}dX\right]^{2/q}+$$

$$+c\cdot\vartheta\int_{Q(X^0,4\sigma)}\left(1+\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{2(j-m)}||D^\alpha u||^2\right)dX.$$

La maggiorazione (3.20) vale dunque con ϑ arbitrariamente piccolo pur di prendere σ non superiore ad 1.

Siamo dunque nelle condizioni del lemma 2.III con

$$g=\left(1+\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|=j}\sigma^{2(j-m)}||D^\alpha u||^2\right)^{q/2}$$

ed $r=\dfrac{2}{q}>1$. Allora esiste $\varepsilon>0$ tale che $\forall p\in\left[\dfrac{2}{q},\ \dfrac{2}{q}+\varepsilon\right)$ e per ogni

$Q(X^0,\sigma) \subset\subset Q(X^0,4\sigma) \subset\subset Q$ con $\sigma \leq 1$, si ha

$$\text{(3.21)} \qquad \left[\fint_{Q(X^0,\sigma)} \left(1 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2(j-m)} ||D^\alpha u||^2 \right)^{qp/2} dX \right]^{2/pq} \leq$$
$$\leq K \left[\fint_{Q(X^0,4\sigma)} \left(1 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2(j-m)} ||D^\alpha u||^2 \right) dX \right].$$

Ponendo $\bar{s} = 2 + \varepsilon q$ ed $s = pq$ possiamo dire che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\forall s \in [2, \bar{s})$

$$\text{(3.22)} \qquad \left[\fint_{Q(X^0,\sigma)} \left(1 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2(j-m)} ||D^\alpha u||^2 \right)^{s/2} dX \right]^{1/s} \leq$$
$$\leq K \left[\fint_{Q(X^0,4\sigma)} \left(1 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2(j-m)} ||D^\alpha u||^2 \right) dX \right]^{1/2}.$$

Osservando ora che le derivate di ordine massimo si possono esprimere nel modo seguente:

$$\text{(3.23)} \qquad \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u||^2 = \left(1 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2(j-m)} ||D^\alpha u||^2 \right) -$$
$$- \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{|\alpha|=j} \sigma^{2(j-m)} ||D^\alpha u||^2 \right),$$

e appartenendo il secondo addendo del secondo membro a $L^{\frac{2(n+2m)}{n+2(m-1)}}(Q, \mathbb{R}^N)$(3), (vedi [4]), si ha l'asserto.

(3) Possiamo supporre $\bar{s} \leq \frac{2(n+2m)}{n+2(m-1)}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Giaquinta M., Modica G., *Regularity results for some classes of higher order non linear elliptc systems,* J. Reine Angew. Math., **311/312** (1979), 253-266.

[2] Giaquinta M., Struwe M., *On the partial regularity of weak solutions of non linear parabolic systems,* Math. Z. **179** (1982), 437-451.

[3] Marino M., Maugeri A., *Partial hölder continuity of solutions of non linear parabolic systems of second order with quadratic growth,* (in corso di stampa sul Bollettino U.M.I.).

[4] Marino M., Maugeri A., *L^p theory and partial hölder continuity for quasi linear parabolic systems of higher order with strictly controlled growth,* Annali di Matematica pura ed Applicata (IV), Vol. CXXXIX, 107-146.

Facoltà di Ingegneria
Via Emilio Cuzzocrea, 48
89100 Reggio Calabria (Italia)