«LE MATEMATICHE»
Vol. XLII (1987) - Fasc. I-II, pp. 121-130

OSSERVAZIONI SULLA DUALITÀ PER OPERATORI BOOLEANI

GIULIA SIMI (Siena) (*)

We extend the duality theory established by Jònsson-Tarski-Halmos for Boolean hemimorphisms to a wider theory and we give some preliminary results.

1. Premessa.

È noto il legame che esiste fra emimorfismi relazioni booleane (Teoria di Jònsson-Tarski-Halmos).

Siano S, T, due spazi di Stone e A, B le relative algebre dei «clopen». Ricordiamo che una $f : A \to B$ si dice un emimorfismo se e soltanto se

(1.1) $$f0 = 0 \quad \text{«normalità»}$$

(1.2) $$f(p+q) = fp + fq \ (p, q \in A) \quad \text{«additività»}$$

(*) Entrato in Redazione il 16 novembre 1988

La relazione «duale» di f è la f^* definita fra T ed S da:

(1.3) yf^*x se e soltanto se per ogni $p \in A$ se $x \in p$ allora $y \in fp$.

Essa è una relazione «booleana» ossia, se $y \in T$, $f^*(y)$ è un chiuso di S e se $p \in A$ allora $f^{*-1}(p) \in B$.

Viceversa presa un R booleana, il duale R^* è definito da

$$R^*p = R^{-1}(p) \quad (p \in A)$$

ed è un emimorfismo.

Inoltre se f è un emimorfismo, $f^{**} = f$ e se R è una relazione booleana $R^{**} = R$. In molte situazioni logiche (logiche modali, logica intuizionista, ecc.) si ha a che fare tuttavia con operatori su strutture più deboli per le quali manca una teoria della dualità. Fortunatamente i risultati di Halmos si possono generalizzare sostituendo «emimorfismi» con funzioni normali additive da A a $C(T)$ (dove $C(T)$) è il reticolo dei chiusi di T) e «relazioni booleane» con relazioni in cui l'immagine di un punto è un chiuso e la controimmagine di un clopen è un chiuso.

Dopo di che sorge naturale considerare addirittura funzioni normali e additive da $C(S)$ (reticolo dei chiusi di S) a $C(T)$ (reticolo dei chiusi di T) e relazione definite considerando, nella 1.3, tutti i chiusi di $C(S)$ anziché i soli clopen.

Notazione. Le operazioni reticolari di un algebra di Boole si indicheranno con $+, \cdot$,; la complementazione con ν.

2. Quasi emimorfismi e relazioni quasi booleane.

Siano A e B algebre di Boole, S e T i rispettivi spazi di Stone e «pensiamo», al solito, A e B come algebre dei clopen di S e T.

DEFINIZIONE 2.1. *Una funzione f da A all'insieme dei chiusi di T ($C(T)$) additiva e normale si dirà un quasiemimorfismo.*

Ovviamente se $\mathsf{O}f \subseteq B$ allora f è un emimorfismo.

Ovviamente i quasiemimorfismi sono monotoni.

DEFINIZIONE 2.2. *Una relazione* $R \subseteq T \times S$ *soddisfacente le seguenti condizioni:*

2.21. *Per ogni* $p \in A$, $R^{-1}p$ *è un chiuso di* T

2.22. *Per ogni* $y \in T, R(y)$ *è un chiuso di* S

si dirà quasibooleana (se inoltre le controimmagine dei clopen sono clopen allora è una relazione booleana).

TEOREMA 2.3. *Se* $f : A \to C(T)$ *è un quasiemimorfismo allora la relazione* $f^* \subseteq T \times S$ *così definita:*

$$f^* = \{(y, x) : \textit{per ogni } p \in A \textit{ se } x \in p \textit{ allora } y \in fp\}$$

è una relazione quasibooleana.

Dualmente se R *è una relazione quasibooleana* R^* *definita da* A *a* $C(T)$:

$$R^*p = R^{-1}p$$

è un quasiemimorfismo.

Inoltre $f^{**} = f, R^{**} = R$.

Dimostrazione. Si ha per $y \in T$

$$\begin{aligned}\nu(f^*(y)) &= \nu\{x \in S : \text{ per ogni } p \in A \text{ da } x \in p \text{ allora } y \in fp\} = \\ &= \{x \in S : \text{ esiste un } p \in A \text{ con } x \in p \text{ e } y \notin fp\} = \\ &= \sum\{p \in A : y \notin fp\}\end{aligned}$$

Quest'ultimo insieme è un aperto onde $f^*(y)$ è un chiuso.

Sia $p \in A$. Ora si ha:

$$\begin{aligned}f^{*-1}p &= \{y \in T : \text{ esiste un } x \in p \text{ con } (y, x) \in f^*\} = \\ &= \{y \in T : \text{ esiste un } x \in p \text{ tale che} \\ &\qquad\qquad \text{per ogni } r \in A \text{ se } x \in r \text{ allora } y \in fr\} :\end{aligned}$$

Mostriamo che $f^{*-1}(p) = fp$ ossia l'immagine inversa di un clopen è un chiuso di T.

La $f^{*-1}(p) \subseteq fp$ è ovvia. (preso un $y \in f^{*-1}p$ esiste un $x \in p$ con $(y, x) \in f^*$, per def. di f^*, $y \in fp$).

Sia $y \in fp$ e, per assurdo, $y \notin f^{*-1}p$. Allora per ogni $x \in p$ esiste un $r_x \in A$ con $x \in r_x$ e $y \notin fr_x$.

Gli r_x costituiscono un ricoprimento aperto del chiuso p, che essendo un chiuso di uno spazio compatto, è compatto.

Così esistono certi $r_i (i \in n)$ in numero finito con $p \subseteq \sum_{i \in n} r_i$, $y \notin fr_i (i \in n)$.

Ma si ha $y \in fp \subseteq f \sum_{i \in n} r_i = \sum_{i \in n} fr_i$, il che è assurdo. Il resto del teorema si verifica facilmente.

TEOREMA 2.4. *Se R è quasibooleana allora in essa le immagini e le controimmagini di chiusi sono chiusi.*

Dimostrazione. Sia Y un chiuso di $T, X = R(Y)$ e $x \notin X$.

Per ogni $y \in Y$, $R(y)$ è un chiuso, contenuto in X e quindi $x \notin R(y)$.

Perciò c'è almeno un clopen p_y con $x \in p_y$ e $p_y \cap R(y) = \emptyset$.

Ovviamente $y \notin R^{-1}(p_y)$ e allora si ha $Y \cap \bigcap_{y \in Y} R^{-1}(p_y) = \emptyset$.

Per la compattezza ne segue che esistono certi punti $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ in numero finito con $Y \cap \bigcap_{i \in n} R^{-1}(p_{y_i}) = \emptyset$. Ne segue che è anche $X \cap \bigcap_{i \in n} p_{y_i} = \emptyset$, se infatti, per assurdo, un certo z appartenesse a quest'ultima intersezione sarebbe associato in R a un certo $u \in Y$ che starebbe anche negli $R^{-1}(p_{y_i})$. Poiché ciò vale per ogni $x \notin X$, l'insieme X risulta chiuso.

Sia ora X un chiuso di S e $Y = R^{-1}X$. comunque preso un $y \notin Y$ sarà $R(y)$ un chiuso e disgiunto da X onde (S è normale) esisterà un clopen p contenente X e disgiunto da $R(y)$. Ora $R^{-1}(p)$ risulta essere chiuso, contenere Y con $y \notin R^{-1}(p)$. Così Y è chiuso.

Osservazione Dal teorema precedente segue che possiamo chiamare relazione quasibooleana ogni $R \subseteq T \times S$ per cui le immagini e le controimmagini di chiusi sono chiusi.

Notiamo che l'inverso di una relazione quasibooleana è ancora una relazione quasibooleana.

Per cui se f è un quasiemimorfismo da A a $C(T)$ dove:

$$fp = f^{*-1}(p)$$

allora la $g : B \to C(S)$ così definita

$$gq = f^*(q) = (f^{*-1})^* q$$

è un quasiemimorfismo.

Si verficano alcune proprietà che legano f e g.

TEOREMA 2.5. *f e g sono legate dalle seguenti proprietà:*

(2.5.1) *$g = 1$ se e soltanto se $fp \neq 0$ per ogni $p \in A$ con $p \neq 0$.*

(2.5.3) *f è moltiplicativa se e soltanto se $f^* \subseteq T \times S$ è una funzione (si intenda non necessariamente di dominio T).*

(2.5.3) *$f1 = 1$ se e soltanto se $Df^* = T$.*

Dimostrazione. Sia $f^*(1) = 1$, $p \in A$ e $p \neq 0$, allora esiste un $x \in p$ ed esso sarà immagine in f^* di un $y \in T$. Per la 1.3 sarà $y \in fp$ e quindi $fp \neq 0$.

Viceversa:

Se $fp \neq 0$ per ogni $p \in A$ con $p \neq 0$ allora $f^*(1) = 1$.

Sia, per assurdo, $f^*(1) \neq 1$, ossia esista un $x \in S$ con $x \notin f^*(1)$, cioè per ogni $y \in T$ sia $(y, x) \notin f^*$.

Segue che per ogni $y \in T$ esiste un $p_y \in A$ con $x \in p_y$ e $y \notin fp_y$.

Ossia $T = \sum_{y \in Y} \nu fp_y$. T è così l'unione di questi νfp_y tale che $x \in p_y$ e $y \notin fp_y$.

T è uno spazio compatto, quindi esistono certi p_i in numero finito $(i \in n)$ con $x \in p_i$,

$$T = \sum_{i \in n} \nu f p_i = \nu f p_0 + \ldots + \nu f p_j + \ldots + \nu f p_{n-1}.$$

da cui:

$$0 = f p_0 \cdot f p_1 \cdot \ldots \cdot f p_{n-1}.$$

Dalla monotonia di f segue:

$$f(p_0 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}) < f p_0 \cdot f p_2 \cdot \ldots \cdot f p_{n-1}.$$

Ossia $f(p_0 \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}) = 0$ con $(p_0 \cdot p_1 \ldots p_{n-1}) \neq 0$ il che è assurdo. 2.5.2 e 2.5.3 sono di semplice dimostrazione.

COROLLARIO 2.6. *f e g sono moltiplicative se e soltanto se f^* è una funzione iniettiva.*

Dimostrazione. Ovvia dal 2.5.2.

3. Estensione di f e g.

Sia f che g possono essere estesi a certi $\check{f}$, $\check{g}$ da $C(S)$ a $C(T)$ e da $C(T)$ a $C(S)$ rispettivamente nel seguente modo:

$$\check{f} : C(S) \to C(T)$$

$$\check{g} : C(T) \to C(S)$$

$$\check{f}X = f^{*-1}X \quad (X \in C(S))$$

$$\check{g}Y = f^{*}Y \quad (Y \in C(T))$$

$\check{f}$ e $\check{g}$ risultano normali e additive e $\check{}$ conserva la composizione.

DEFINIZIONE 3.1. *$\check{f}$ e $\check{g}$ si diranno estensioni naturali di f e g.*

Dato un quasi emimorfismo $f : A \to C(T)$, sia f l'estensione naturale di f da $C(S)$ a $C(T)$.

Indichiamo con $(\breve{f})^*$ la relazione fra T e S per cui:

$y(\breve{f})^*x$ se e soltanto se per ogni chiuso X di S se $x \in X$ allora $y \in \breve{f}X$.

Facilmente si ha

TEOREMA 3.2. $(\breve{f})^* = f$.

Dimostrazione. Se $y(f)^*x$ segue ovviamente yf^*x. Viceversa, sia $\bar{y}f^*\bar{x}$. Supponiamo per assurdo, che non sia $\bar{y}(f)^*\bar{x}$ segue che esiste un chiuso X di S con $\bar{x} \in X$ e $\bar{y} \notin \breve{f}X = f^{*-1}X$. Ma se $\bar{y} \notin f^{*-1}X$ allora per ogni $x \in X$ si ha $(\bar{y}, x) \notin f^*$ in particolare $(\bar{y}, \bar{x}) \notin f^*$ il che è assurdo.

Data una funzione f da $C(S)$ a $C(T)$ normale e additiva e definita una relazione f^* fra T e S nel seguente modo:

$$f^* = \{(y, x) : \text{ per ogni chiuso di } C(S) \text{ se } x \in X \text{ allora } y \in fX\}$$

non è detto che sia quasibooleana nel senso che l'immagine e la controimmagine di un chiuso sia un chiuso come mostra il seguente esempio:

Sia Z un qualunque insieme infinito e J l'algebra dei finiti e dei cofiniti di Z.

Sia $S = Z \cup \{a\}$ il suo spazio di Stone; definiamo una f da $C(S)$ a $C(S)$ ponendo:

$$fY = \begin{cases} Y \cap Z : & \text{se } Y \text{ è finito} \\ S : & \text{se } Y \text{ è infinito} \end{cases}$$

Si verifica facilmente che f è additiva e normale ed f^* è la relazione diagonale su Z.

Ma $f^{*-1}S = Z$, dove Z è un aperto e non è un chiuso.

Si ha però il seguente risultato:

TEOREMA 3.3. *Se f è una funzione additiva e normale da $C(S)$ a $C(T)$, completamente determinata dalla sua restrizione ad A, per* *cui cioè:*

$$fX = \cap\{fp : p \in AX \subseteq p\}$$

allora $f^* = \{(y,x)$*: per ogni chiuso* $X \in C(S)$ *se* $x \in X$ *allora* $y \in fX\}$ *è una relazione quasibooleana.*

Dimostrazione. Sia $p \in A$. Vogliamo mostrare che $f^{*-1}p = fp$.

$f^{*-1}p \subseteq fp$ è ovvio (Se $y \in f^{*-1}p$ esiste un $x \in p$ con $(y,x) \in f^*$, ossia per ogni chiuso $X \in C(S)$ se $x \in X$ allora $y \in fX$, in particolare $y \in fp$).

Supponiamo che $y \in fp$ e, per assurdo, $y \notin f^{*-1}p$. Allora per ogni $x \in p$ esiste un chiuso X di $C(S)$ con $x \in X$ e $y \notin fX$. Ma se $y \notin fX$ allora esiste un q_x con $X \subseteq q_x$ e $y \notin fq_x$.

Ma i q_x costituiscono un ricoprimento aperto del chiuso p, che essendo un chiuso di uno spazio compatto, è compatto.

Segue che esistono certi q_{x_i} in numero finito tali che

$$p \subseteq \sum_{i \in n} q_{x_i}.$$

Ma si ha $fp \subseteq \sum_{i \in n} fq_{x_i}$, dove $y \in fp$ e $y \notin fq_{x_i}$ per $i \in n$. Siamo giunti ad un assurdo.

Si ha per $y \in T$

$$\begin{aligned}\nu f^*(y) &= \nu\{x \in S : \text{per ogni chiuso } X \text{ di } C(S) \text{ se } x \in X \text{ allora } y \in fX\}\\ &= \{x \in S : \text{esiste un chiuso } X \text{ di } C(S) \text{ con } x \in X \text{ e } y \in fX\}\\ &= \{x \in S : \text{esiste un chiuso } X \text{ di } C(S) \text{ con } x \in X \text{ e } y \notin fp \text{ con } X \subseteq p\}\\ &= \sum\{p \in A : y \notin fp\}.\end{aligned}$$

Quest'ultimo insieme è un aperto, per cui $f^*(y)$ è un chiuso.

Segue facilmente dal risultato precedente:

TEOREMA 3.4. *Se* $f : C(S) \to C(T)$ *è additiva e normale e tale che:*

$$fX = \cap\{fp : p \in A, X \subseteq p\}$$

allora $fX = f^{*-1}X$.

Dimostrazione. $f^{*-1}X \subseteq fX$ è ovvio.

Viceversa:

Se $y \in fX$ e $y \notin f^{*-1}X$ allora per ogni $x \in X$ esiste un chiuso $\bar{X}$ di $C(S)$ con $x \in \bar{X}$ e $y \notin f\bar{X}$. Ossia, per come è definita la f, esiste un clopen q_x con $x \in q_x$ e $y \notin fq_x$. I q_x costituiscono un ricoprimento aperto di X. Ma X è un chiuso di uno spazio compatto, per cui è compatto.

Esistono un numero finito di q_{x_i} tale che $X \subseteq \sum_{i \in n} q_{x_i}$.

Si ha $fX \subseteq f\sum_{i\in n} q_{x_i} = \sum_{i \in n} fq_{x_i}$, ma $f \in fX$ e $y \notin fq_{x_i}$ per ogni $i \in n$.

Siamo giunti così ad un assurdo.

Si ha inoltre:

TEOREMA 3.5. *Sia* $f^* \subseteq T \times S$ *una relazione quasibooleana, posto* $fX = f^{*-1}X$ *allora* $fX = \{fp : p \in A$ *e* $X \subseteq p\}$

Dimostrazione. $fX \subseteq \cap\{fp : p \in A$ e $X \subseteq p\}$ è ovvio.

Viceversa, sia $y \in \cap\{fp : p \in A$ e $X \subseteq p\}$, per assurdo $y \notin fX$ ossia $y \notin f^{*-1}X$.

Segue che $X \cap f^*\{y\} = \emptyset$.

Per il fatto che S è uno spazio normale esiste un clopen p contenente X per cui $p \cap f^*\{y\} = \emptyset$ cioè $y \notin f^{*-1}p$ contro l'ipotesi che $y \in fp = f^{*-1}p$ per ogni $p \in A$ con $X \subseteq p$.

Se infine consideriamo una f additiva e normale da A a $C(T)$, e sia $\check{f}$ l'estensione naturale di f

$$\check{f} : C(S) \to C)T)$$

$$\check{f}X = f^{*-1}X = (f)^{*-1}X.$$

Per la proprietà 3.5 si ha che $\check{f}X = \cap\{\check{f}p : p \in A$ e $X \subseteq p\}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Halmos P.R., *Algebraic Logic,* Chelsea Publ. Co. New York 1962.

[2] Magari R., *Algebra della logica,* In corso di pubblicazione (disponibile presso il Dipt. di Matematica dell'Un. di Siena).

[3] Magari R., *Modal diagonalizable Algebras,* Boll. U.M.I. (5) 15.B, (1978) 303-320.

[4] Magari R., *Boolean Algebras with Hemimorphisms,* in corso di pubblicazione sul Boll. U.M.I.

[5] Magari R., *Boolean Algebras with further Operations,* Dipt. Mat; Un. Siena, n. 201, 1989.

[6] Tarski A., *Logic, semantics, metamathematics,* Oxford 1956.

[7] Toti Rigatelli L., *Sullo spazio dei modelli di un calcolo generale,* Ann. Un. Ferrara (n.s.) Sez. VII, Vol., XIII, n. 5 (1968) 55-65.

Dipartimento di Matematica
Via Del Capitano, 15
53100 Siena (Italia)