«LE MATEMATICHE»
Vol. XLII (1987) - Fasc. I-II, pp. 211-218

SULLE SEZIONI IPERPIANE DI UNA VARIETÀ PROIETTIVA

RICCARDO RE (Catania) (*)

A result about curves in $\mathbb{P}^3$ obtained by R. Strano is generalized to arbitrary subvarieties of $\mathbb{P}^n$. A curve in $\mathbb{P}^3$ of degree > 4 not contained in a quadric surface is a complete intersection if its generic hyperplane section is a complete intersection: this result is also true, with no restrictions, for any locally C.M. closed non-degenerate subscheme of $\mathbb{P}^n$, $n > 3$.

Introduzione.

In questo lavoro si generalizzano alcuni risultati di R. Strano (vedi [4], [5]) che permettono di dedurre proprietà di una curva in $\mathbb{P}^3$ da quelle di una sua sezione piana. In particolare Strano dimostra che se la sezione piana generica $\Gamma = C \cap H$ di una curva non degenere di grado di $C \subseteq \mathbb{P}^3$ è una intersezione completa, allora anche C è una intersezione completa, eccetto i casi $d = 4$ oppure C giacente su una quadrica. In questo lavoro si estende tale risultato a sottovarietà qualsiasi $X \subseteq \mathbb{P}^4$, osservando che per $n > 3$ non vi è alcuna eccezione.

Strumento principale sarà la generalizzazione di un teorema

(*) Entrato in Redazione l'8 aprile 1989

(vedi [5]) che stabilisce una condizione sufficiente affinchè una curva in $H \cong \mathbb{P}^2$ di grado s passante per Γ si possa sollevare ad una superficie di $\mathbb{P}^3$ passante per C: ciò sarà lo scopo del 1, dopo aver provato alcuni lemmi preliminari.

Il 2 è invece dedicato al teorema sulle complete intersezioni. Per le definizioni ed i concetti fondamentali ci riferiamo ad Hartshorne [2].

1. Per sottovarietà X di $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_k$, k campo algebricamente chiuso di caratteristica 0, intendiamo un sottoschema chiuso r-dimensionale di $\mathbb{P}^n_k$ equidimensionale e localmente $C.M.$.

Se H è un generico iperpiano di $\mathbb{P}^n$, indicheremo con $\Gamma = X \cap H$ la generica sezione iperpiana, con $\mathcal{J}_X$ il fascio di ideali di X in $\mathbb{P}^n_k$ e con $\mathcal{J}_\Gamma$ il fascio di ideali di Γ in $\mathbb{P}^{n-1} = H$.

Indichiamo inoltre con $J = \bigoplus_{i \geq 0} H^0(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{J}_\Gamma(i))$ l'ideale omogeneo di Γ in $R = k[X_1, \ldots, X_n] = \bigoplus_{i \geq 0} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_H(i))$.

Premettiamo alcuni lemmi che saranno utili in seguito.

Dati V, $\bar{V}$ spazi vettoriali su k di dimensione finita, una famiglia di applicazioni lineari $\psi_t : V \to \bar{V}$, $t \in k$, sarà detta *regolare* se, fissate due basi in V, $\bar{V}$ la matrice associata è del tipo $(f_{ij}(t))$ con $f_{ij} : k \to k$ funzioni polinomiali.

LEMMA 1. *Siano V, $\bar{V}$ due k-spazi vettoriali di dimensione finita ed una famiglia regolare $\varphi_t : V \to \bar{V}$ tale che $\varphi_t = f(t)\psi + \psi_t$ con $f : k \to k$ una funzione polinomiale non nulla con $f(0) = 0$, ψ applicazione lineare fissata, e ψ_t famiglia regolare. Supponiamo che:*

1) $Im\psi_t \subseteq \bar{U}$ *con* $\bar{U}$ *sottospazio fissato di* $\bar{V}$

2) $\operatorname{rank}\varphi_0 \geq \operatorname{rank}\varphi_t \; \forall t \in k$ *e* $\operatorname{rank}\varphi_0 \geq \operatorname{rank}\psi$

Allora si ha $\psi(\ker\varphi_0) \subseteq \bar{U}$.

Dimostrazione. Sia $W = \psi^{-1}(\bar{U})$, $\bar{W} = \psi(W)$. Supponiamo per assurdo che $\ker\varphi_0 \not\subseteq W$. Osservando che $\dim W \geq \dim\ker\psi \geq \dim\ker\varphi_0$ per l'ipotesi 2), si ha anche $W \not\subseteq \ker\varphi_0$, altrimenti dovrebbero coincidere, contrariamente a quanto supposto. Sia $T = W \cap \ker\varphi_0$, allora esistono $T' \neq (0)$, $S' \neq (0)$ sottospazi di V tali che $W = T' \oplus T$, $\ker\varphi_0 = T \oplus S'$ ed infine esiste S'' tale che $V = S'' \oplus T' \oplus T \oplus S'$. Costruiamo una base $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_h\}$ di V tale che: $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}\}$ base di S''; $\{\alpha_m, \ldots, \alpha_u\}$ base di T'; $\{\alpha_{u+1}, \ldots, \alpha_v\}$ base di T; $\{\alpha_{v+1}, \ldots, \alpha_h\}$ base di S' con $1 \leq m \leq u$ e $v < h$. Ne segue che $\{\alpha_{u+1}, \ldots, \alpha_h\}$ è una base di $\ker\varphi_0$ e $\{\varphi_0(\alpha_1), \ldots, \varphi_0(\alpha_u)\}$ è una base di $Im\varphi_0 \subseteq \bar{U}$. Inoltre $\{\psi(\alpha_m), \ldots, \psi(\alpha_v)\}$ generano $\bar{W}$ e $\{\psi(\alpha_1), \ldots, \psi(\alpha_{m-1}), \psi(\alpha_{v+1}), \ldots, \psi(\alpha_h)\}$ sono linearmente indipendenti e generano un sottospazio $\bar{S} \subseteq \bar{V}$ tale che $\bar{S} \cap \bar{W} = (0)$.

Consideriamo la applicazione φ_t; per t generico si avrà $f(t) \neq 0$ e $\varphi_t(\alpha_1), \ldots, \varphi_t(\alpha_u)$ base di $Im\varphi_t$. Il nucleo $\ker\varphi_t$ incontra il sottospazio $S'' \oplus T' \oplus S'$ avente per base $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_u, \alpha_{v+1}, \ldots, \alpha_h\}$ perchè $(h-u)+(h+u-v) > h$. Allora esiste una relazione non banale:

$$\lambda_1\varphi_t(\alpha_1) + \ldots + \lambda_{m-1}\varphi_t(\alpha_{m-1}) + \lambda_m\varphi_t(\alpha_m) + \ldots$$

$$\ldots + \lambda_u\varphi_t(\alpha_u) + \lambda_{v+1}\varphi_t(\alpha_{v+1}) + \ldots + \lambda_h\varphi_t(\alpha_h) = 0$$

Essendo $\varphi_t = f(t)\psi + \psi_t$ si ha:

$$f(t)\{\lambda_1\psi(\alpha_1) + \ldots + \lambda_{m-1}\psi(\alpha_{m-1}) + \lambda_{v+1}\psi(\alpha_{v+1}) + \ldots + \lambda_h\psi(\alpha_h)\} \in \bar{U}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_{m-1} = \lambda_{v+1} = \ldots = \lambda_h = 0$, e si giunge ad una relazione non banale $\lambda_m\varphi_t(\alpha_m) + \ldots + \lambda_u\varphi_t(\alpha_u) = 0$, assurdo.

Il lemma seguente generalizza uno dato da Laudal [1]:

LEMMA 2. *Sia J un ideale omogeneo di R. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1) $Tor^R_{n-2}(J,k)_{h+n-1} = 0$

2) $\forall n-pla(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$, *$Q_i \in R_h$ per $i = 1, 2, \ldots, n$, tale che $Q_j X_j - Q_j X_i \in J_{h+1} \forall i, j$, allora esiste $Q \in R_{h-1}$ tale che $Q_i - X_i Q \in J_h$ per $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Dimostrazione. Il complesso di Koszul $\mathbb{K}(X_1, \ldots, X_n, R)$ è una risoluzione libera per $k \cong R/(X_1, \ldots, X_n)$:

$$\mathbb{K} : 0 \to R(-n) \xrightarrow{d_n} \bigoplus^{n} R(-n+1) \to \ldots \to \bigoplus^{n} R(-1) \xrightarrow{d_1} R \to 0$$

Tensorizziamo con R/J ottenendo:

$$R/J \otimes_R \mathbb{K}_k : 0 \to R/J(-n) \xrightarrow{d_n} \bigoplus^{n} R/J(-n+1) \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots$$
$$\ldots \to \bigoplus^{n} R/J(-1) \xrightarrow{d_1} R/J \to 0$$

In particolare 2) equivale a:

$$(\ker d_{n-1}/Im d_n)_{h+n-1} = 0$$

quindi a:

$$(Tor^R_{n-1}(R/J, k))_{h+n-1} = 0$$

La dimostrazione è completa ricordando che $Tor^R_{n-1}(R/J, k) \cong Tor^R_{n-2}(J, k)$.

Stabiliamo ora il teorema principale di questo lavoro, la cui dimostrazione usa una tecnica già introdotta in [4], [5].

TEOREMA 1. *Sia X una sottovarietà di $\mathbb{P}^n$, Γ la sua generica sezione iperpiana. Sia s intero non negativo e supponiamo che per ogni h tale che $0 \leq h \leq s+n-1$ sia $Tor^R_{n-2}(J, k)_h = 0$. Allora la mappa canonica $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{J}_X(s)) \to H^0(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{J}_\Gamma(s))$ è suriettiva.*

Dimostrazione. Dalla sequenza esatta di morfismi fra fasci di moduli in $\mathbb{P}^n$, per H iperpiano generico di $\mathbb{P}^n$:

$$0 \to \mathcal{J}_X(s-1) \to \mathcal{J}_x(s) \to i_*\mathcal{J}_\gamma(s) \to 0 \quad (i : \mathbb{P}^{n-1} \equiv H \to \mathbb{P}^n \text{ inclusione})$$

si ha la sequenza esatta lunga:

$$0 \to H^0(\mathcal{J}_X(s-1)) \xrightarrow{H} H^0(\mathcal{J}_X(s)) \to H^0(\mathcal{J}_\Gamma(s)) \to$$
$$\to H^1(\mathcal{J}_X(s-1)) \xrightarrow{\varphi_H} H^1(\mathcal{J}_X(s)) \to H^1(\mathcal{J}_\Gamma(s))$$

La applicazione φ_H per H generico ha rango massimo fra le applicazioni $\varphi_{H'}$, H' iperpiano di $\mathbb{P}^n$. Il teorema è provato se si dimostra che $\ker\varphi_H = (0)$.

Sia $\alpha \in \ker\varphi_H$, allora per ogni iperpiano H' si ha $\alpha H' \in Im\varphi_H$ per il lemma 1, ponendo $\bar{U} = Im\varphi_H$, $\psi = \varphi_{H'}$, $f(t) = t$, $\psi_t = \varphi_H$ da cui $\varphi_t = t\varphi_{H'} + \varphi_H = \varphi_{H+tH'}$.

Siano $H = H_0, H_1, \dots, H_n$ iperpiani indipendenti. Allora se α_Γ è la immagine di α in $H^1(\mathcal{J}_\Gamma(s-1))$ ed $L_i = H \cap H_i$, per il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathcal{J}_X(s-1)) & \xrightarrow{H_i} & H^1(\mathcal{J}_X(s)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(\mathcal{J}_\Gamma(s-1)) & \xrightarrow{L_i} & H^1(\mathcal{J}_\Gamma(s)) \end{array}$$

abbiamo $\alpha_\Gamma L_i = 0$ in $H^1(\mathcal{J}_\Gamma(s))$. Sia $\sigma \in H^0(\mathcal{O}_X(s-1))$ tale che la sua immagine in $H^1(\mathcal{J}_X(s-1))$ sia α, e sia $\sigma_\Gamma \in H^0(\mathcal{O}_\Gamma(s-1))$ la restrizione di σ a Γ; abbiamo allora che la proiezione di $\sigma_\Gamma L_i$ in $H^1(\mathcal{J}_\Gamma(s))$, che è uguale a $\alpha_\Gamma L_i$, è nulla, quindi per l'esattezza di $H^0(\mathcal{O}_H(s)) \to H^0(\mathcal{O}_\Gamma(s)) \to H^1(\mathcal{J}_\Gamma(s)) \to 0$ si ha che $\sigma_\Gamma L_i = \bar{Q}_i$ in $H^0(\mathcal{O}_\Gamma(s))$ per $Q_i \in H^0(\mathcal{O}_H(s))$. Identificando H con $\mathbb{P}^{n-1}$, per $R = k[X_1, \dots, X_n]$ possiamo porre $X_j = L_i$ $i = 1, 2, \dots, n$. Segue che $Q_j X_j = Q_j X_i$ mod $H^0(\mathcal{J}_\Gamma(s+1))$ $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$. Si ha per ipotesi $Tor^R_{n-2}(J, k)_{s+n-1} = 0$ e pertanto si può applicare il lemma 2. Si trova $Q \in R_{s-1}$ tale che $\sigma_\Gamma X_i = \bar{Q} X_i$ Da ciò segue $\sigma_\Gamma = \bar{Q}$, osservando che $X_1, \dots, X_n$ generici sono regolari in R/J e che $\mathcal{O}_\Gamma$ è il fascio indotto da R/J su $\mathbb{P}^{n-1}_k$.

Quindi σ_Γ appartiene all'immagine dell'applicazione $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(s-1)) \to H^0(\mathcal{O}_\Gamma(s-1))$, pertanto l'immagine α_Γ di σ_Γ in $H^1(\mathcal{J}_\Gamma(s-1))$ è nulla, e quindi per l'esattezza di $H^1(\mathcal{J}_X(s-2)) \to H^1(\mathcal{J}_X(s-1)) \to H^1(\mathcal{J}_\Gamma(s-1))$ segue $\alpha \in Im\varphi_H$, cioè $\exists\beta \in H^1(\mathcal{J}_X(s-2))$ tale che $\beta H = \alpha$, $\beta \in \ker\varphi_{H^2}$.

Consideriamo l'applicazione $\varphi_{H^l} : H^1(\mathcal{J}_X(s-l)) \to H^1(\mathcal{J}_X(s))$, $l > 1$.

Applicando il lemma 1 per

$$\varphi_{(H+tH')^l} = t^l H'^l + \sum_{i=0}^{l-1} \binom{l}{i} t^i H'^i H^{l-i} = t^l \psi + \psi_t$$

ponendo

$$\psi = \varphi_{H'^l}, \psi_t = \sum_{i=0}^{l-1} \binom{l}{i} t^i H'^i H^{l-i} \quad \text{ed} \quad \bar{U} = Im\varphi_H.$$

Allora si ha che $\alpha \in \ker\varphi_{H^l} \Rightarrow \alpha H'^l \in Im\varphi_H$.

Consideriamo i piani indipendenti $H = H_0, H_1, \ldots, H_n$ ed il piano $H_1+\lambda_2 H_2+\ldots+\lambda_n H_n$. Allora abbiamo $\alpha(H_1+\lambda_2 H_2+\ldots+\lambda_n H_n)^l \in Im\varphi_H$ $\forall\lambda_2, \ldots, \lambda_n \in k$. Sviluppando le potenze e sostituendo opportuni valori di $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ possiamo ricavare $\alpha H_{i_1}, \ldots, H_{i_l} \in Im\varphi_H$ per ogni l-pla $(i_1, i_2, \ldots, i_l)$ tale che $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_l \leq n$.

Come sopra consideriamo α_Γ, σ, σ_Γ, $L_i = H_i \cap H = X_i$ in $R = k[X_1, \ldots, X_n]$.

Si avrà $\sigma_\Gamma X_{i_1}, \ldots, X_{i_l} = \bar{Q}_{i_1\ldots i_l}$ in $H^0(\mathcal{O}_\Gamma(s))$.

Allora con ragionamenti analoghi al caso $l = 1$ si trova $\alpha = \beta H$ per $\beta \in H^1(\mathcal{J}_X(s-l-1))$ $\forall\alpha \in \ker\varphi_{H^l}$. Per induzione se $\alpha \in \ker\varphi_H \subseteq H^1(\mathcal{J}_X(s-1))$ per ogni $l > 0$ esiste $\beta \in H^1(\mathcal{J}_X(s-l-1))$ tale che $\alpha = H^l\beta$. Osservando che per l'ipotesi di X localmente C.M., per $i \ll 0$ si ha $H^1(\mathcal{J}_X(i)) \cong H^0(\mathcal{O}_X(i)) = 0$, allora $\alpha = 0$, da cui la tesi.

2. Prima di dimostrare il teorema sulle complete intersezioni ricordiamo alcune proprietà delle risoluzioni libere di un ideale omogeneo $J \subseteq R = k[X_1, \ldots, X_n]$.

Osservazione 1. Ogni ideale omogeneo $J \subseteq R$ ha una risoluzione libera minimale, cioè una sequenza esatta $0 \to F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \to F_1 \xrightarrow{d_1} J \to 0$ con F_i R-moduli liberi graduati e tale che tensorizzando con $k \cong R/(X_1, \ldots, X_n)$ tutti i morfismi $d_i \otimes id_k$ sono nulli. Per una tale risoluzione si ha $Tor^R_{h-1}(J,k) \cong F_h \otimes_R k$, e quindi $\dim_k(Tor^R_{h-1}(J,k))_t$ è il numero di generatori in grado t dell'$h-1$-esimo modulo di sizigie di J.

Inoltre è ben noto che se $J = (F_1, \ldots, F_{n-r})$ è una completa intersezione, cioè $F_1, \ldots, F_{n-r}$ è una R-successione con $\deg F_i = \alpha_i$, allora una risoluzione minimale di J è data dal complesso di Koszul $\mathbb{K}(F_1, \ldots, F_{n-r}; R)$:

$$0 \to R(-\alpha_1 - \ldots - \alpha_{n-r}) \xrightarrow{d_{n-r}} \ldots$$

$$\ldots \to \bigoplus_{1 \le i \le j \le n-r} R(-\alpha_i - \alpha_j) \xrightarrow{d_r} \bigoplus_{1 \le i \le n-r} R(-\alpha_i) \xrightarrow{d_1} J \to 0$$

Enunciamo e dimostriamo infine il principale risultato del presente lavoro:

TEOREMA 2. *Sia X sottovarietà non degenere di $\mathbb{P}^n_k$, $n \geq 3$,* $\dim X = r \geq 1$, *$deg X = d$.*

Supponiamo che la sezione generica $\Gamma = X \cap h$ sia una completa intersezione. Allora si hanno i due casi:

1) $\dim X = r > 1$; *In tal caso X è sempre una completa intersezione*

2) $\dim X = 1$. *Se $n > 3$, oppure $n = 3$ e $d > 4$ ed X non sta su una quadrica, allora X è una completa intersezione.*

Dimostrazione. Sia $J = (F_1, \ldots, F_{n-r})$ l'ideale di Γ in $\mathbb{P}^{n-1} \equiv H$. Nel caso 1) abbiamo $Tor^R_{n-2}(J, k) = 0$ infatti, come si è detto, la risoluzione minimale di J è di lunghezza $\leq n - 2$.

Per il teorema 1 esistono ipersuperfici $\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_{n-r}$ di gradi $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$ tali che $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-r} = d$, che contengono X, il chè implica che X è una completa intersezione (X è C.M.).

Nel caso 2) $Tor^R_{n-2}(J, k) \cong R(-\alpha_1 - \ldots - \alpha_{n-1}) \otimes_R k, \alpha_i = deg F_i$. Supponiamo $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \alpha_{n-1}$. Abbiamo che $Tor^R_{n-2}(J, k)_t = 0$ per $t < \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}$.

Se $\alpha_{n-1} + n - 1 < \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}$ allora tutte le F_i si possono «sollevare» ed X sarà una completa intersezione. Ciò accade se $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-2} > n - 1$. Supponendo X non degenere ciò è sempre vero per $n > 3$, e per $n = 3$ l'unica eccezione si ha quando Γ sta su una quadrica. Se $d = 2t > 4$ allora la conica contenente Γ si può sollevare ad una quadrica contenente X: infatti in questo caso non vi sono prime sizigie almeno fino al grado $s + 2$, quindi $Tor^R_1(J, k)_h = 0$ per $0 \leq h \leq s + 2$, in base alla oss. 1.

Osservazione 2. Ogni curva irriducibile di grado $2t$ su una quadrica è tale che Γ, avendo la funzione di Hilbert di una completa intersezione, è una completa intersezione, (vedi Maggioni-Ragusa [3]). Fra queste curve si trovano quindi delle eccezioni al teorema 2. Infine per $d = 4$ una quartica (riducibile) che non sta una quadrica è ovviamente un'eccezione al teorema 2.

BIBLIOGRAFIA

[1] Laudal O.A., *A generalized trisecant lemma,* L.M.N. **687**, Springer 1978, 112-149.

[2] Hartshorne R., *Algebraic geometry,* Springer G.T.M. **52**, 1977.

[3] Maggioni R., Ragusa A., *The Hilbert function of generic plane section of curves in* $\mathbb{P}^3$, Inv. Math. **91** (1988) 253-258.

[4] Strano R., *A characterization of complete intersection curves in* $\mathbb{P}^3$, Proc. A.M.S. **104**, 1988.

[5] Strano R., *Sulle sezioni iperpiane delle curve,* Rendiconti S.M.F. Milano, **57** (1987), 125-134.

Dipartimento di Matematica
Università di Catania
V.le A. Doria, 6
95125 Catania (Italy)