UN 3-DISEGNO ASSOCIATO AD UNA n-FIBRAZIONE DI $PG(2n+1, q)$

LUIGIA BERARDI (L'Aquila) *

In this paper we prove that a total n-spread of $PG(2n+1, q)$ gives us a new 3-design. Moreover, in the case $n = 1$ we construct some new 2-designs using spreads.

Introduzione.

Come ben noto un $t-(v, k, \lambda)$ disegno è una *struttura di incidenza* (cf. [3]) $\mathbf{D} = (S, B, I)$, ove S, B sono insiemi finiti, $I \subseteq S \times B$, soddisfacente le seguenti proprietà:

(1) S è un v-insieme i cui elementi sono detti "*punti*"; B è un b-insieme i cui elementi sono detti "*blocchi*".

(2) Fissati ad arbitrio t punti di S esistono esattamente λ elementi di B a cui essi sono incidenti.

(3) Ogni elemento di B è incidente ad esattamente k punti di S.

Se denotiamo con r_s il numero dei blocchi di B incidenti con esattamente $s (0 \leq s \leq t)$ punti di S, risulta:

$$(1.1) \qquad r_s = \binom{v-s}{t-s}\lambda \Big/ \binom{k-s}{t-s} \qquad 0 \leq s \leq t.$$

Nel seguito, per evitare casi banali, si suppone $t < k < v$.

* Entrato in Redazione l'8 febbraio 1988, ed in forma rivista il 19-5-1988

Una n-fibrazione (cf. [6], [2], [5], [1]) in uno spazio proiettivo finito, di dimensione r su un campo di Galois $GF(q)$, $\mathbf{P} = PG(r, q)$, è una famiglia F di spazi n-dimensionali, $n \geq 1$, di $\mathbf{P}$ a due a due sghembi. Essa si dice *totale* o *parziale* a seconda che l'insieme degli elementi di F ricopra o no $\mathbf{P}$.

Come è usuale si pone $\vartheta_s(x) := (x^{s+1} - 1)/(x - 1)$, $\vartheta_s := \vartheta_s(q)$. Se F è allora una qualsiasi n-fibrazione totale di $\mathbf{P}$ risulta come ben noto:

$$|F| = \vartheta_r/\vartheta_n = \vartheta_k(q^{n+1}) \tag{1.2}$$

essendo necessario e sufficiente per l'esistenza di siffatte fibrazioni che sia $r + 1 = (k + 1)(n + 1)$.

Non ci risulta siano stati mai messi in evidenza i seguenti esempi di disegni, e precisamente il 3-disegno $\mathbf{F}$ definito nel paragrafo 2 e il 2-disegno $\mathbf{A}_\lambda$ definito nel paragrafo 3.

Si conclude questa breve nota provando che il disegno $\mathbf{A}_\lambda$ è il *derivato* (o la *contrazione*) di $\mathbf{F}$ se, e solo se, $\lambda = q + 1$ ed $r = 3$. Dai 3-disegni $\mathbf{F}$ si possono ottenere per derivazione 2-disegni.

2. Il 3-disegno F.

Definiamo una struttura di incidenza $\mathbf{F} = (F, R, I)$ nel modo seguente:

(i) i *punti* di $\mathbf{F}$ sono gli elementi di una fissata n-fibrazione totale F di uno spazio proiettivo $\mathbf{P} = PG(2n + 1, q)$, $n \geq 1$, sul campo di Galois $GF(q)$ d'ordine $q = p^h$, p primo, $h \geq 1$;

(ii) i *blocchi* di $\mathbf{F}$, cioè gli elementi di R, sono le rette di $\mathbf{P}$, che non sono contenute negli elementi di F;

(iii) l'*incidenza* I di un elemento $V \in F$ con un elemento $s \in R$ è definita da:

$$V\, I\, s \Leftrightarrow V \cap s \neq \emptyset.$$

Proviamo che:

PROPOSIZIONE 2.1. *La struttura di incidenza* $\mathbf{F}$ *è un* $3 - (v, k, \lambda)$ *disegno con:* $v = \vartheta_r/\vartheta_n$, $k = q + 1$, $\lambda = \vartheta_n$.

Dimostrazione. È evidente che per tre punti qualsiasi di $\mathbf{F}$ passano esattamente λ blocchi di R, poichè ciò equivale a dire che: fissati comunque tre spazi n-dimensionali U, V, W in **P** che sono spazi di F (quindi tra loro sghembi), esistono esattamente $\lambda = \vartheta_n$ rette (necessariamente non contenute negli spazi di F) che sono incidenti ai tre spazi dati. Tali rette (*blocchi* di **F**) si ottengono fissando, ad esempio, un punto x in uno dei tre spazi-punti di **F**, ad esempio $x \in U$, ed intersecando i due spazi $(n+1)$-dimensionali $\langle x, V\rangle$, $\langle x, W\rangle$. (Si noti che tali due spazi $(n+1)$-dimensionali, essendo congiunti da uno spazio $(2n+1)$-dimensionale, si incontrano precisamente in una retta).

È anche di facile verifica che ogni blocco di R è incidente ad esattamente $k = q+1$ *punti* di **F**: infatti ciò equivale a dire che per ogni punto di una retta non contenuta in una fibra di **F**, passa uno ed un solo elemento di **F**.

Osservazione. Nel precedente ordine di idee possiamo considerare la seguente costruzione del seguente $t-(v,t,(n+1)^t)$-disegno con $v = (r+1)/(n+1)$. Sia F una v-partizione di un $(r+1)$-insieme P in $(n+1)$-parti. Chiamiamo *punti* gli elementi di F e *blocchi* i t-sottoinsiemi di P che sono incidenti ad esattamente t *punti*.

Si ottiene una struttura di incidenza che, come è facile verificare, ha i parametri sopra detti.

3. I 2-disegni A_λ e la contrazione di F.

Una seconda classe di disegni e precisamente di $2-(v,k,\lambda)$ disegni costruita mediante 1-*fibrazioni parziali* di $PG(r,q)$ è quella ottenuta con il seguente procedimento.

In $\mathbf{F} = PG(r,q)$, $r \geq 3$, $q \geq 3$ fissiamo due iperpiani H_1 ed H_2 aventi in comune uno spazio $\bar{S}$ di dimensione $r-2$.

È semplice costruire una omografia $f : H_1 \to H_2$ che muti $\bar{S}$ in sè e subordini su $\bar{S}$ stesso, una omografia priva di elementi uniti. (cf. [6]).

La famiglia di rette $\{\overline{x, f(x)}\}$, con $x \in H_1$, è una 1-fibrazione parziale F in **P**. Ovviamente, denotando con $H_i, i = 1,2,\ldots,q+1$ gli iperpiani per $\bar{S}$, ogni retta di F incontra ciascuno di essi, in uno ed un sol punto.

Più in generale presa una qualsiasi fibrazione totale di **P**, mediante rette, fissiamo uno spazio $r-2$ dimensionale $\bar{S}$, fibrato totalmente dagli elementi di F, se un tale spazio esiste (come nel caso particolare dell'omografia f). Allora le rette fuori di $\bar{S}$ e in F intersecano ciascuno degli iperpiani per $\bar{S}$ in uno ed un sol punto. Denotiamo con H_i $i = 1, 2, \ldots, q+1$ tali iperpiani.

Definiamo ora una *nuova struttura di incidenza*. In $\mathbf{P} = PG(r, q)$ con $r \geq 3$, $q \geq 3$, fissiamo una 1-fibrazione totale F di $\mathbf{P}$ ed uno spazio $r-2$ dimensionale $\bar{S}$ tali che ogni elemento di F che interseca $\bar{S}$ sia contenuto in $\bar{S}$. Fissiamo inoltre in modo arbitrario $\lambda(\lambda \geq 1)$ iperpiani $H_1, H_2, \ldots, H_\lambda$ contenenti $\bar{S}$. Per ogni fissato intero λ la struttura:

$$\mathbf{A}_\lambda = (A, L_\lambda, I)$$

è così definita:

1) L'insieme A dei *punti* è lo spazio affine $(r-1)$-dimensionale $H_1 - \bar{S}$.
2) L'insieme L_λ dei blocchi, che in questo caso chiamiamo *rette*, è l'unione di tutte le rette contenute negli spazi affini $(r-1)$-dimensionali $H_1 - \bar{S}$, $H_2 - \bar{S}, \ldots, H_\lambda - \bar{S}$.
3) L'*incidenza* I tra un punto $x \in A = H_1 - \bar{S}$ ed una retta $r \in L_\lambda$ è definita nel modo seguente:

$$x\, I\, r \Leftrightarrow \exists f \in F \quad \text{t.c.} \quad x \in f,\ f \cap r \neq \emptyset.$$

Si ha subito:

PROPOSIZIONE 3.1. *La struttura di incidenza* $\mathbf{A}_\lambda$, *sopra definita è un* $2-(v,k,\lambda)$ *disegno con* $v = q^{r-1}$, $k = q$ *e* $\lambda \leq q+1, \lambda$ *arbitrario.*

Dimostrazione. Evidente.

Osservazione. Si noti che la costruzione per $q = 2$ fornisce un disegno degenere e precisamente un $2-(2^{r-1}, 2, \lambda)$ disegno.

Una costruzione del tutto analoga può essere data, con $\lambda \leq q$, fissando, invece della fibrazione F, la famiglia di tutte le rette contenenti un fissato punto esterno all'unione degli iperpiani e sghembe con $\bar{S}$ (ovvero intersecanti gli iperpiani in punti distinti).

Ad altre costruzioni si può pervenire nel modo seguente. Supponiamo che su A si consideri una struttura diversa da quella di un piano affine, magari anche aggiungendo un nuovo punto ∞ ad A. Vi sono esempi classici quali i piani inversi miqueliani, che sono $3-(q^2+1, q+1, 1)$ disegni, cf. [3]. Se $q = 2$ ed $r \geq 4$, possiamo considerare la famiglia dei piani di A. Questa famiglia induce su A una struttura di sistema di

Steiner $3-(2^{r-1},4,1)$. La sopra indicata costruzione, generalizzata in modo ovvio a questi casi, conduce ad altri 3-disegni, penso mai considerati prima.

Il disegno **F** nel caso particolare di $n=1$ ed $r=3$ è dipendente dal disegno $\mathbf{A}_{q+1}$, costruito in $PG(3,q)$, in quanto:

PROPOSIZIONE 3.2. *La contrazione in un punto del disegno* **F** *è isomorfa al disegno* $\mathbf{A}_{q+1}$ *se, e solo se,* $r=3$ *con* $n=1$.

Dimostrazione. Il derivato del disegno **F** in un punto è un $2-(v^*,k^*,\lambda^*)$ con $v^*=\vartheta_r/\vartheta_n-1$, $k^*=q$, $\lambda^*=\vartheta_n$.

Poichè $\mathbf{A}_{q+1}$ ha i parametri $v=q^{r-1}$, $k=q$, $\lambda=q+1$, risulta necessariamente $n=1$ e quindi $v^*=\vartheta_r/\vartheta_1-1$ il che implica che r è dispari. Si ha inoltre:

$$v^*=v \Leftrightarrow \vartheta_r-\vartheta_1=q^{r-1}\vartheta_1 \Leftrightarrow r=3.$$

Pertanto perchè il derivato di **F** sia $\mathbf{A}_{q+1}$ è necessario che sia $r=3$ con $n=1$.

Proviamo ora che la condizione è sufficiente.

Contraendo **F** in un suo punto, in particolare nel punto $r\in F$, si hanno come blocchi nuovi tutte e sole le rette affini dei piani affini α_i, con $i=1,2,\dots,q+1$, ottenuti dai piani proiettivi passanti per r sopprimendo la retta r stessa. (In questo caso $\bar{S}$ è r e gli spazi $H_i-\bar{S}$ coincidono con gli α_i).

Fissato uno di questi piani, ad esempio α_1, consideriamo:

$$g: F-\{r\}\to\alpha_1$$

ove $g(s)=s\cap\alpha_1$. Tale applicazione g è manifestamente un isomorfismo tra il derivato di **F** ed $\mathbf{A}_{q+1}$ costruito con i piani $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{q+1}$.

Ringraziamenti.

L'Autrice ringrazia l'anonimo Referee, per le osservazioni che hanno contribuito ad una migliore stesura dell'articolo stesso.

BIBLIOGRAFIA

[1] Berardi L., *Alcune condizioni necessarie per l'esistenza di t-fibrazioni in* $PG(r, q)$ *di classe* $(0, m)_{2t+1}$, Rend. di Mat., **4** (1984), 59-69.

[2] Beutelspacher A., Eugeni F., *On the type of partial t-spreads in finite projective spaces*, Discrete Math., **54** (1985), 241-257.

[3] Dembowski P., *Finite geometries*, Springer Verlag, Berlin 1968.

[4] Cameron P.J., Van Lint J.H., *Graphs, codes and designs*, London Math. **12** 43 (1980), Cambridge University Press.

[5] Eugeni F., *Sulla esistenza di t-fibrazioni in* $PG(r, q)$ *di fissato tipo*, Boll. Un. Mat. Ital. Alg. e Geom. **1** (1984), 141-164.

[6] Tallini G., *Fibrazioni in rette di* $PG(r, q)$, Le Matematiche, **37** (1982), 8-27.

L. Berardi
Dipartimento di Ingegneria
Elettrica - Università
L'Aquila