SULLA DIPENDENZA CONTINUA DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI DARBOUX DAI COEFFICIENTI DELL'EQUAZIONE

GIUSEPPE TOMASELLI (Catania) *

We prove the continuous dependence of z, the solution of the Darboux problem for the equation

$$(E) \qquad z_{xy} + A(x,y)z_x + B(x,y)z_y + C(x,y)z = f(x,y) \ ,$$

on the coefficients A, B, C.
Here, z belongs to a Sobolev space and A, B, C verify some rather general assumptions (which do not imply boundedness).

1. Introduzione.

Siano: $\Delta =]0,a[\times]0,b[$ $(a,b > 0)$, $p \in [1,\infty]$, $n \in N$; sia f un elemento di $L^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$ e siano φ, ψ due funzioni, elementi degli spazi di Sobolev $W^{1,p}(]0,a[,\mathbf{R}^n)$ e $W^{1,p}(]0,b[,\mathbf{R}^n)$, rispettivamente, tali che $\varphi(0) = \psi(0)$. Allora, come è noto, se A, B, C sono tre $n\times n$-matrici funzioni, definite in Δ e verificanti opportune ipotesi (per es.: $A, B, C \in L^\infty(\Delta, \mathbf{R}^{n,n})$; cfr. [5], Theorem 5), il problema di Darboux

$$(E) \qquad z_{xy} + A(x,y)z_x + B(x,y)z_y + C(x,y)z = f(x,y) \quad \text{q.o. } (x,y) \in \Delta \,,$$

$$(C) \qquad z(x,0) = \varphi(x) \quad \forall \ x \in]0,a[\quad , \quad z(0,y) = \psi(y) \quad \forall \ y \in]0,b[\,,$$

* Entrato in Redazione il 30 marzo 1988

ammette, nella classe $W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$ delle funzioni z che appartengono a $L^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$ insieme con le derivate nel senso distribuzioni z_x, z_y, z_{xy}, una ed una sola soluzione.

Recentemente, A. Villani [6] e G. Emmanuele – A. Villani [3], nell'ambito dello studio di un problema di ottimizzazione relativo ad un processo di controllo descritto da un sistema iperbolico del tipo (E), hanno dimostrato l'esistenza, l'unicità e la dipendenza continua dai dati (φ, ψ) e dal termine noto f della soluzione $z \in W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$, adottando per i coefficienti A, B, C delle ipotesi abbastanza generali (che non ne implicano la limitatezza). Precisamente, supposto $1 < p < \infty$, in [3] si dimostra che se A, B, C sono tre funzioni misurabili da Δ in $\mathbf{R}^{n,n}$, verificanti le ipotesi

$$(\alpha) \qquad \operatorname*{sup\,ess}_{x \in]0,a[} \int_0^b |A(x,y)|^p \, dy < \infty ,$$

$$(\beta) \qquad \operatorname*{sup\,ess}_{y \in]0,b[} \int_0^a |B(x,y)|^p \, dx < \infty ,$$

$$(\gamma) \qquad C \in L^p(\Delta, \mathbf{R}^{n,n}) ,$$

allora, per ogni $f \in L^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$ ed ogni $(\varphi, \psi) \in W^{1,p}(]0, a[, \mathbf{R}^n) \times W^{1,p}(]0, b[, \mathbf{R}^n)$, con $\varphi(0) = \psi(0)$, esiste una ed una sola funzione $z = z\big((\varphi, \psi), f\big)$, elemento di $W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$, soluzione del problema (E), (C). Inoltre la funzione

$$\big((\varphi, \psi), f\big) \to z\big((\varphi, \psi), f\big)$$

è un isomorfismo algebrico e topologico tra lo spazio dei dati $\big((\varphi, \psi), f\big)$ (sottospazio lineare chiuso di $W^{1,p}(]0, a[, \mathbf{R}^n) \times W^{1,p}(]0, b[, \mathbf{R}^n) \times L^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$) e lo spazio $W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$ delle soluzioni. Le ipotesi (α), (β), (γ) sono in un certo senso le più generali possibili; infatti, come viene dimostrato in [3], esse sono condizione necessaria e sufficiente affinché l'operatore differenziale lineare del secondo ordine definito dal primo membro della (E) trasformi $W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$ in un sottoinsieme di $L^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$.

Come indicato dal titolo, lo scopo del presente lavoro è lo studio della dipendenza delle soluzioni z del problema (E), (C) dai coefficienti A, B, C, ritenendo fissati i dati $\big((\varphi, \psi), f\big)$. Precisamente, dopo avere introdotto nel n. 2 gli spazi funzionali che utilizzeremo nel corso del lavoro, evidenziandone alcune proprietà fondamentali, nel n. 3 dimostriamo che, fissati comunque i dati $\big((\varphi, \psi), f\big)$, la trasformazione che ad A, B, C associa z, soluzione di (E), (C), è una trasformazione continua dello spazio dei coefficienti, munito di una topologia collegata in modo naturale alle ipotesi (α), (β), (γ), nello spazio $W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$.

È a questo punto naturale chiedersi se vi sia dipendenza continua della z anche dal complesso dati-coefficienti. Anche questa domanda ha, come vedremo nel n. 4, una risposta affermativa. Infatti, un esame approfondito della dimostrazione di esistenza, unicità e dipendenza continua data in [3], mostra (Teorema 3) che la norma della trasformazione lineare

$$\big((\varphi, \psi), f\big) \longrightarrow z\big((\varphi, \psi), f\big)$$

può essere maggiorata con una costante che dipende soltanto dalla norma di A, B, C. Si riesce così provare (Teorema 5) che la funzione che associa z al complesso dati-coefficienti è addirittura lipschitziana in ogni insieme limitato. Per concludere, segnaliamo che i risultati qui conseguiti sono suscettibili di applicazioni nell'ambito della teoria dei controlli per sistemi retti da equazioni del tipo (E). Ad esempio, come vedremo in un successivo lavoro, tali risultati consentono di studiare la permanenza di un certo tipo di controllabilità completa al variare dei coefficienti.

Ringrazio il prof. Alfonso Villani per le utili discussioni sulle questioni affrontate nel presente lavoro.

2. Spazi Funzionali.

Sia, d'ora in avanti, $1 < p < \infty$. Denotato con R, $R =]x_0, x_1[\times]y_0, y_1[$, un rettangolo aperto di $\mathbf{R}^2$, faremo uso dei seguenti spazi funzionali.

DEFINIZIONE 1 (cfr. [2], [4]). $W_p^*(R, \mathbf{R}^n)$ *è lo spazio di Banach delle (classi di) funzioni misurabili* $w : (x, y) \longrightarrow w(x, y)$, *da* R *in* $\mathbf{R}^n$, *che appartengono a* $L^p(R, \mathbf{R}^n)$ (1) *assieme alle derivate nel senso delle distribuzioni* w_x, w_y, w_{xy}, *con la norma*

$$\|w\|_{W_p^*(R,\mathbf{R}^n)} = \Big(\|w\|^p_{L^p(R,\mathbf{R}^n)} + \|w_x\|^p_{L^p(R,\mathbf{R}^n)} + \|w_y\|^p_{L^p(R,\mathbf{R}^n)} + \|w_{xy}\|^p_{L^p(R,\mathbf{R}^n)} \Big)^{1/p} \quad \forall\ w \in W_p^*(R, \mathbf{R}^n).$$

DEFINIZIONE 2 ((2)). $L_y^{\infty,p}(R, \mathbf{R}^n)$ (*risp.* $L_x^{\infty,p}(R, \mathbf{R}^n)$) *è lo spazio di Banach delle (classi di) funzioni misurabili* $u : (x, y) \longrightarrow u(x, y)$,

(1) Il significato di $L^p(R, \mathbf{R}^n)$ e della norma $\|\ \ \|_{L^p(R,\mathbf{R}^n)}$ è quello usuale.

(2) Per ulteriori ragguagli sugli spazi L^p con norma mista, cfr., per es., [1].

da R *in* $\mathbf{R}^n$*, tali che la funzione numerica* $x \to \sup\operatorname{ess}_{y\in]y_0,y_1[} |u(x,y)|$ (*risp.* $y \to \sup\operatorname{ess}_{x\in]x_0,x_1[} |u(x,y)|$) *appartiene a* $L^p(]x_0,x_1[)$ (*risp.* $L^p(]y_0,y_1[)$), *con la norma*

$$||u||_{L_y^{\infty,p}(R,\mathbf{R}^n)} = \left(\int_{]x_0,x_1[} \sup\operatorname{ess}_{y\in]y_0,y_1[} |u(x,y)|^p\,dx\right)^{1/p} \quad \forall\ u \in L_y^{\infty,p}(R,\mathbf{R}^n)$$

(*risp.*

$$||u||_{L_x^{\infty,p}(R,\mathbf{R}^n)} = \left(\int_{]y_0,y_1[} \sup\operatorname{ess}_{x\in]x_0,x_1[} |u(x,y)|^p\,dy\right)^{1/p} \quad \forall\ u \in L_x^{\infty,p}(R,\mathbf{R}^n)\ ).$$

DEFINIZIONE 3. $\mathcal{W}_p(R,\mathbf{R}^n)$ *è lo spazio di Banach delle (classi di) funzioni misurabili* $w : (x,y) \to w(x,y)$*, da* R *in* $\mathbf{R}^n$*, che appartengono a* $L^\infty(R,\mathbf{R}^n)$ *e le cui derivate nel senso delle distribuzioni* w_x, w_y *appartengono, rispettivamente, a* $L_y^{\infty,p}(R,\mathbf{R}^n)$ *e a* $L_x^{\infty,p}(R,\mathbf{R}^n)$*, con la norma*

$$\begin{aligned} ||w||_{\mathcal{W}_p(R,\mathbf{R}^n)} = {} & ||w||_{L^\infty(R,\mathbf{R}^n)} \\ & + ||w_x||_{L_y^{\infty,p}(R,\mathbf{R}^n)} + ||w_y||_{L_x^{\infty,p}(R,\mathbf{R}^n)} \quad \forall\ w \in \mathcal{W}_p(R,\mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 4. $L_y^{p,\infty}(R,\mathbf{R}^{n,n})$ (*risp.* $L_x^{p,\infty}(R,\mathbf{R}^{n,n})$) *è lo spazio di Banach delle (classi di) funzioni misurabili* $F : (x,y) \to F(x,y)$*, da* R *in* $\mathbf{R}^{n,n}$*, tali che la funzione numerica* (3)

$$x \to \int_{]y_0,y_1[} |F(x,y)|^p\,dy$$

(*risp.*

$$y \to \int_{]x_0,x_1[} |F(x,y)|^p\,dx\ )$$

appartiene a $L^\infty(]x_0,x_1[)$ (*risp.* $L^\infty(]y_0,y_1[\ )$*, con la norma*

$$||F||_{L_y^{p,\infty}(R,\mathbf{R}^{n,n})} = \sup\operatorname{ess}_{x\in]x_0,x_1[} \left(\int_{]y_0,y_1[} |F(x,y)|^p\,dy\right)^{1/p} \quad \forall\ F \in L_y^{p,\infty}(R,\mathbf{R}^{n,n})$$

(3) La norma $|F|$ di una matrice $F \in \mathbf{R}^{n,n}$ è qui definita come il $\sup\{|F_v| : v \in \mathbf{R}^n\ ,\ |v| \le 1\}$.

(*risp.*

$$||F||_{L^{p,\infty}_x(R,\mathbf{R}^{n,n})} = \sup_{y\in]y_0,y_1[} \text{ess} \left(\int_{]x_0,x_1[} |F(x,y)|^p dx \right)^{1/p} \quad \forall F \in L^{p,\infty}_x(R,\mathbf{R}^{n,n}))).$$

Le funzioni w, elementi di $W^*_p(R,\mathbf{R}^n)$, si caratterizzano nel modo seguente:

PROPOSIZIONE 1 (Cfr. [2], Teorema 1.2). *Gli elementi di* $W^*_p(R,\mathbf{R}^n)$ *sono tutte e sole le funzioni* u *della forma*

$$(1) \qquad w(x,y) = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} h(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta + \int_{x_0}^{x} h_1(\xi)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} h_2(\eta)\,d\eta + c \quad \forall\ (x,y) \in R\,,$$

con $h \in L^p(R,\mathbf{R}^n)$, $h_1 \in L^p(]x_0,x_1[,\mathbf{R}^n)$, $h_2 \in L^p(]y_0,y_1[,\mathbf{R}^n)$, $c \in \mathbf{R}^n$.

Inoltre, denotato con $\mathcal{S}_p(R,\mathbf{R}^n)$ lo spazio di Banach prodotto (4)

$$\mathcal{S}_p(R,\mathbf{R}^n) = L^p(R,\mathbf{R}^n) \times L^p(]x_0,x_1[,\mathbf{R}^n) \times L^p(]y_0,y_1[,\mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^n\,,$$

si ha (cfr. [2], Proposizione 1.1)

PROPOSIZIONE 2. *La trasformazione che ad ogni* $(h,h_1,h_2,c) \in \mathcal{S}_p(R,\mathbf{R}^n)$ *associa l'elemento* w *di* $W^*_p(R,\mathbf{R}^n)$ *definito dalla* (1) *è un isomorfismo algebrico e topologico tra* $\mathcal{S}_p(R,\mathbf{R}^n)$ *e* $W^*_p(R,\mathbf{R}^n)$.

Dalle Proposizioni 1 e 2 discendono facilmente le seguenti ulteriori proprietà dello spazio $W^*_p(R,\mathbf{R}^n)$.

PROPOSIZIONE 3. $W^*_p(R,\mathbf{R}^n) \subset C^0(\overline{R},\mathbf{R}^n)$ *algebricamente e topologicamente.*

PROPOSIZIONE 4. *Sia* $w \in W^*_p(R,\mathbf{R}^n)$. *Allora, per ogni* $y \in [y_0,y_1]$ (5) (*risp.* $x \in [x_0,x_1]$), *la funzione* $x \to w(x,y)$ (*risp.* $y \to w(x,y)$)

(4) Ogni qual volta si considererà uno spazio di Banach prodotto lo si intenderà munito della norma del grafico.

(5) Si tenga presente che, in virtù della Proposizione 3, w si prolunga per continuità in $\overline{R}$. Questa avvertenza non verrà ribadita nel seguito.

appartiene a $W^{1,p}(]x_0,x_1[,\mathbf{R}^n)$ (6) *(risp.* $W^{1,p}(]y_0,y_1[,\mathbf{R}^n)$*). Inoltre, l'operatore lineare (di traccia)* $w \longrightarrow w(\cdot,y)$ *(risp.* $w \longrightarrow w(x,\cdot)$*), da* $W_p^*(R,\mathbf{R}^n)$ *in* $W^{1,p}(]x_0,x_1[,\mathbf{R}^n)$ *(risp.* $W^{1,p}(]y_0,y_1[,\mathbf{R}^n)$*), è continuo, uniformemente al variare di* $y \in [y_0,y_1]$ *(risp. di* $x \in [x_0,x_1]$*).*

PROPOSIZIONE 5. *Sia* $w \in W_p^*(R,\mathbf{R}^n)$*. Allora* $w_x \in L_y^{\infty,p}(R,\mathbf{R}^n)$ *(risp.* $w_y \in L_x^{\infty,p}(R,\mathbf{R}^n)$*). Inoltre, la trasformazione lineare* $w \longrightarrow w_x$ *(risp.* $w \longrightarrow w_y$*), da* $W_p^*(R,\mathbf{R}^n)$ *in* $L_y^{\infty,p}(R,\mathbf{R}^n)$ *(risp. in* $L_x^{\infty,p}(R,\mathbf{R}^n)$*), è continua.*

Dalle Proposizioni 3 e 5 discende ovviamente la

PROPOSIZIONE 6. $W_p^*(R,\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{W}_p(R,\mathbf{R}^n)$ *algebricamente e topologicamente.*

Conseguentemente, posto

$$\| w \|_{W_p^*(R,\mathbf{R}^n)} = ||w||_{\mathcal{W}_p(R,\mathbf{R}^n)} + ||w_{xy}||_{L^p(R,\mathbf{R}^n)} \quad \forall\ w \in W_p^*(R,\mathbf{R}^n)\,,$$

si ha che la topologia della norma $\|\ \|_{W_p^*(R,\mathbf{R}^n)}$ è meno fine di quella della norma $||\ ||_{W_p^*(R,\mathbf{R}^n)}$. D'altra parte è immediato verificare che

$$||w||_{W_p^*(R,\mathbf{R}^n)} \leq \varrho \| w \|_{W_p^*(R,\mathbf{R}^n)} \quad \forall\ w \in W_p^*(R,\mathbf{R}^n)\,,$$

dove ϱ è un'opportuna costante (che dipende solo dal rettangolo R). Si ha pertanto

PROPOSIZIONE 7. $||\ ||_{W_p^*(R,\mathbf{R}^n)}$ *e* $\|\ \|_{W_p^*(R,\mathbf{R}^n)}$ *sono norme equivalenti.*

Siano, adesso, $F \in L_y^{p,\infty}(R,\mathbf{R}^{n,n})$, $u \in L_y^{\infty,p}(R,\mathbf{R}^n)$. Si ha allora, come è facile verificare, $Fu \in L^p(R,\mathbf{R}^n)$. Anzi, denotato con R' un arbitrario rettangolo aperto contenuto in R, risulta

$$||Fu||_{L^p(R',\mathbf{R}^n)} \leq ||F||_{L_y^{p,\infty}(R,\mathbf{R}^{n,n})}||u||_{L_y^{\infty,p}(R',\mathbf{R}^n)}\,.$$

Analogamente, se $G \in L_x^{p,\infty}(R,\mathbf{R}^{n,n})$, $v \in L_x^{\infty,p}(R,\mathbf{R}^n)$, si ha $Gv \in L^p(R,\mathbf{R}^n)$ e risulta, per ogni rettangolo aperto $R' \subset R$,

$$||Gv||_{L^p(R',\mathbf{R}^n)} \leq ||G||_{L_x^{p,\infty}(R,\mathbf{R}^{n,n})}||u||_{L_x^{\infty,p}(R',\mathbf{R}^n)}\,.$$

(6) Il significato dello spazio di Sobolev $W^{1,p}$ è quello abituale.

Conseguentemente, denotato con $\mathbf{M}^p(R, \mathbf{R}^{n,n})$ lo spazio di Banach prodotto ([7]) $L_y^{p,\infty}(R, \mathbf{R}^{n,n}) \times L_x^{p,\infty}(R, \mathbf{R}^{n,n}) \times L^p(R, \mathbf{R}^{n,n})$ ([8]), sussiste il seguente lemma, cui dovremo fare ricorso ripetutamente nel seguito del lavoro.

LEMMA 1. *Sia* $M = (A, B, C) \in \mathbf{M}^p(R, \mathbf{R}^{n,n})$ *e sia* L *l'operatore differenziale lineare*

$$Lw = Aw_x + Bw_y + Cw\,.$$

Allora L *trasforma* $\mathcal{W}_p(R, \mathbf{R}^n)$ *in* $L^p(R, \mathbf{R}^n)$. *Inoltre, per ogni rettangolo aperto* $R' \subset R$, *risulta*

$$||Lw||_{L^p(R',\mathbf{R}^n)} \leq ||M||_{\mathbf{M}^p(R,\mathbf{R}^{n,n})}||w||_{\mathcal{W}_p(R',\mathbf{R}^n)} \quad \forall\ w \in \mathcal{W}_p(R, \mathbf{R}^n)\,.$$

3. Dipendenza continua dai coefficienti.

Sia, d'ora in avanti, Δ il rettangolo aperto $]0, a[\times]0, b[$, $a, b > 0$. Denotato con $\Sigma^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$ lo spazio di Banach

$$\{(\varphi, \psi) \in W^{1,p}(]0, a[, \mathbf{R}^n) \times W^{1,p}(]0, b[, \mathbf{R}^n) : \varphi(0) = \psi(0)\}\,,$$

sottospazio lineare chiuso di $W^{1,p}(]0, a[, \mathbf{R}^n) \times W^{1,p}(]0, b[, \mathbf{R}^n)$, indicheremo con $\mathbf{D}^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$ lo spazio di Banach prodotto $\Sigma^p(\Delta, \mathbf{R}^n) \times L^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$.

Con le notazioni introdotte qui e nel paragrafo precedente, considerato il problema di Darboux

$$\text{(E)} \qquad z_{xy} + A(x, y)z_x + B(x, y)z_y + C(x, y)z = f(x, y) \quad \text{q.o. } (x, y) \in \Delta\,,$$

$$\text{(C)} \qquad z(x, 0) = \varphi(x) \quad \forall\ x \in]0, a[, z(0, y) = \psi(y) \quad \forall\ y \in]0, b[\,,$$

il Teorema 3.1 di [3] può essere enunciato come segue:

TEOREMA 1. *Per ogni* $M = (A, B, C) \in \mathbf{M}^p(\Delta, \mathbf{R}^{n,n})$ *ed ogni* $d = ((\varphi, \psi), f) \in \mathbf{D}^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$ *esiste una ed una sola funzione*

$$(x, y) \to z(x, y) = z(x, y; M, d)\,,$$

([7]) Cfr. la nota ([4]).

([8]) Lo spazio di Banach $L^p(R, \mathbf{R}^{n,n})$ è definito in modo ovvio. Si tenga presente anche la nota ([2]).

elemento di $W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$*, soluzione del problema di Darboux* (E), (C).

Inoltre, per ogni $M \in \mathbf{M}^p(\Delta, \mathbf{R}^{n,n})$*, la trasformazione funzionale*

$$d \to z(\cdot; M, d)$$

è un isomorfismo algebrico e topologico tra $\mathbf{D}^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$ *e* $W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$.

Il Teorema 1 esprime la dipendenza continua di $z \in W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$, soluzione di (E), (C), dal complesso dei dati $d = \big((\varphi, \psi), f\big) \in \mathbf{D}^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$.

Supponiamo ora di fissare il complesso dei dati $d = \big((\varphi, \psi), f\big)$ e di far variare invece il complesso dei coefficienti $M = (A, B, C)$. Otteniamo in questo modo una trasformazione funzionale da $\mathbf{M}^p(\Delta, \mathbf{R}^{n,n})$ in $W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$. Vogliamo dimostrare che tale trasformazione è continua. Con termini più precisi, vogliamo provare che vale il seguente

TEOREMA 2. *Per ogni* $d = \big((\varphi, \psi), f\big) \in \mathbf{D}^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$*, la trasformazione funzionale*

$$M \to z(\cdot; M, d),$$

da $\mathbf{M}^p(\Delta, \mathbf{R}^{n,n})$ *in* $W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$*, è continua.*

Dimostrazione.. Sia $d = \big((\varphi, \psi), f\big)$ un qualsiasi elemento di $\mathbf{D}^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$. Sia $(M_k)_{k\in N} = \big((A_k, B_k, C_k)\big)_{k\in N}$ una successione di elementi di $\mathbf{M}^p(\Delta, \mathbf{R}^{n,n})$, ivi convergente verso $\overline{M} = (\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$. Dobbiamo dimostrare che la successione $\big(z(\cdot; M_k, d)\big)_{k\in N}$ converge in $W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$ verso $z(\cdot, \overline{M}, d)$, cioé che, posto per brevità $z_k = z(\cdot; M_k, d)$, $k \in N$, $\overline{z} = z(\cdot; \overline{M}, d)$, risulta

$$\lim_k \| z_k - \overline{z} \|_{W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)} = 0 .$$

Introdotti gli operatori differenziali lineari

$$\begin{aligned} L_k z &= A_k z_x + B_k z_y + C_k z \quad , \quad k \in N , \\ \overline{L} z &= \overline{A} z_x + \overline{B} z_y + \overline{C} z , \end{aligned}$$

si ha, q.o. in Δ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z_k}{\partial x \partial y} &= -L_k z_k + f \quad , \quad k \in N , \\ \frac{\partial^2 \overline{z}}{\partial x \partial y} &= -\overline{L}\,\overline{z} + f , \end{aligned}$$

e quindi, per il Lemma 1, per ogni $k \in N$ risulta

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\partial^2 z_k}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \overline{z}}{\partial x \partial y} \right\|_{L^p(\Delta,\mathbf{R}^n)} &= ||\overline{L}\overline{z} - L_k z_k||_{L^p(\Delta,\mathbf{R}^n)} \\ &\leq ||(\overline{L} - L_k)\overline{z}||_{L^p(\Delta,\mathbf{R}^n)} + ||L_k(\overline{z} - z_k)||_{L^p(\Delta,\mathbf{R}^n)} \\ &\leq ||\overline{M} - M_k||_{\mathbf{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})}||\overline{z}||_{\mathcal{W}_p(\Delta,\mathbf{R}^)} \\ &\quad + ||M_k||_{\mathbf{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})}||\overline{z} - z_k||_{\mathcal{W}_p(\Delta,\mathbf{R}^n)};\end{aligned}$$

conseguentemente, dato che $\lim_k ||\overline{M} - M||_{\mathbf{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})} = 0$ (e quindi $\sup_k ||M_k||_{\mathbf{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})} < \infty$) è sufficiente dimostrare (cfr. la definizione della norma $\| \ \|_{W_p^*(\Delta,\mathbf{R}^n)}$) che $\lim_k ||z_k - \overline{z}||_{\mathcal{W}_p(\Delta,\mathbf{R}^n)} = 0$. A tale scopo, considerate due qualsiasi decomposizioni degli intervalli $]0,a[$ e $]0,b[$:

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_r = a\,,$$

$$0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_s = b\,,$$

e posto $\Delta_{ij} =]a_{i-1}, a_i[\times]b_{j-1}, b_j[$, $i = 1,\ldots,r$, $j = 1,\ldots,s$, poiché per ogni $z \in \mathcal{W}_p(\Delta,\mathbf{R}^n)$ risulta

$$||z||_{\mathcal{W}_p(\Delta,\mathbf{R}^n)} \leq \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} ||z||_{\mathcal{W}_p(\Delta_{ij},\mathbf{R}^n)},$$

è sufficiente provare che $\lim_k ||z_k - \overline{z}||_{\mathcal{W}_p(\Delta_{ij},\mathbf{R}^n)} = 0$ per ogni $i = 1,\ldots,r$, $j = 1,\ldots,s$.

Denotiamo con $\tilde{z}$ l'elemento di $W_p^*(\Delta,\mathbf{R}^n)$ dato da

$$\tilde{z}(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^x \int_0^y f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \quad , \quad (x,y) \in \Delta;$$

si ha, per ogni $(x,y) \in \Delta$,

$$z_k(x,y) = \tilde{z}(x,y) - \int_o^x \int_0^y (L_k z_k)(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \quad , \quad k \in N,$$

$$\overline{z}(x,y) = \tilde{z}(x,y) - \int_0^x \int_0^y (\overline{L}\overline{z})(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\,,$$

da cui

$$z_k(x,y) - \overline{z}(x,y) = \int_0^x \int_0^y (\overline{L}\overline{z} - L_k z_k)(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \quad , \quad k \in N\,,$$

e quindi, con facili calcoli,

$$z_k(x,y) - \overline{z}(x,y) = w_{ij,k}(x,y) + \sigma_{i,k}(x,y)$$
$$+ \tau_{j,k}(x,y) + \omega_{ij,k}(x,y) \quad , \quad k \in N \ , \ i = 1,\dots,r \ , \ j = 1,\dots,s \ ,$$

dove $w_{ij,k}$, $\sigma_{i,k}$, $\tau_{j,k}$, $\omega_{ij,k}$ sono gli elementi di $W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$ dati da

$$w_{ij,k}(x,y) = \int_{a_{i-1}}^{x} \int_{b_{j-1}}^{y} (\overline{L}\overline{z} - L_k z_k)(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \,,$$

$$\sigma_{i,k}(x,y) = z_k(a_{i-1},y) - \overline{z}(a_{i-1},y) \quad , \quad \tau_{j,k}(x,y) = z_k(x,b_{j-1}) - \overline{z}(x,b_{j-1}) \,,$$
$$\omega_{ij,k}(x,y) = \overline{z}(a_{i-1},b_{j-1}) - z_k(a_{i-1},b_{j-1}) \,.$$

Posto, per $i = 1,\dots,r$, $j = 1,\dots,s$,

$$(2) \qquad |\ \ |_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \text{ o } j = 0 \\ \|\ \ \|_{W_p(\Delta_{ij},\mathbf{R}^n)} & \text{se } i,j \geq 1 \,, \end{cases}$$

risulta, come è facile controllare, per ogni $k \in N$, $i = 1,\dots,r$, $j = 1,\dots,s$,

$$|\sigma_{i,k}|_{ij} \leq |z_k - \overline{z}|_{i-1j} \quad , \quad |\tau_{j,k}|_{ij} \leq |z_k - \overline{z}|_{ij-1} \,,$$
$$|\omega_{ij,k}|_{ij} \leq |z_k - \overline{z}|_{i-1j-1} \,,$$

mentre, per quanto riguarda $w_{ij,k}$, avendosi per ogni $(x,y) \in \Delta$

$$w_{ij,k}(x,y) = \int_{a_{i-1}}^{x} \int_{b_{j-1}}^{y} \big[(\overline{L} - L_k)\overline{z}\big](\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$
$$+ \int_{a_{i-1}}^{x} \int_{b_{j-1}}^{y} [L_k(\overline{z} - z_k)](\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \,,$$

si ottiene con facili calcoli

$$|w_{ij,k}|_{ij} \leq \mu_p(\Delta_{ij})\big(\|(\overline{L} - L_k)\overline{z}\|_{L^p(\Delta_{ij},\mathbf{R}^n)} + \|L_k(\overline{z} - z_k)\|_{L^p(\Delta_{ij},\mathbf{R}^n)}\big) \,,$$

dove

$$(3) \qquad \mu_p(\Delta_{ij}) = \big[(a_i - a_{i-1})(b_j - b_{j-1})\big]^{1/p'}$$
$$+ (a_i - a_{i-1})^{1/p'} + (b_j - b_{j-1})^{1/p'} \quad , \quad 1/p + 1/p' = 1 \,,$$

e quindi, per il Lemma 1,

$$\begin{aligned}|w_{ij,k}|_{ij} &\le \mu_p(\Delta_{ij})\big(\|\overline{M} - M_k\|_{\mathbf{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})}|\overline{z}|_{ij} \\ &\quad + \|M_k\|_{\mathbf{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})}|\overline{z} - z_k|_{ij}\big) \\ &\le \lambda_1 \, \|\overline{M} - M_k\|_{\mathbf{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})} + \lambda_2 \, |\overline{z} - z_k|_{ij} \, ,\end{aligned}$$

dove

$$\lambda_1 = \max_{i,j} \mu_p(\Delta_{ij}) \, |\overline{z}|_{ij} \, ,$$

$$\lambda_2 = \max_{i,j} \mu_p(\Delta_{ij}) \sup_k \|M_k\|_{\mathbf{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})} \, .$$

Otteniamo pertanto, per la norma $|z_k - \overline{z}|_{ij}$, la seguente maggiorazione:

$$\begin{aligned}(4) \quad |z_k - \overline{z}|_{ij} &\le |z_k - \overline{z}|_{i-1j} + |z_k - \overline{z}|_{ij-1} \\ &\quad + |z_k - \overline{z}|_{i-1j-1} + \lambda_1 \, \|\overline{M} - M_k\|_{\mathbf{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})} + \lambda_2 \, |\overline{z} - z_k|_{ij} \, ,\end{aligned}$$

per ogni $k \in N$, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, s$.

A questo punto osserviamo che le costanti λ_1, λ_2 si possono rendere arbitrariamente piccole, pur di effettuare la decomposizione degli intervalli $]0, a[$, $]0, b[$ in intervalli di lunghezza sufficientemente piccola. Supponiamo di avere effettuato la decomposizione di $]0, a[$, $]0, b[$ in modo che $\lambda_2 < 1$. Dalla (4), per $i = j = 1$, segue allora $\lim_k |z_k - \overline{z}|_{11} = 0$; tenuto conto di ciò, ancora dalla (4), per $i = 1$, $j = 2$, segue $\lim_k |z_k - \overline{z}|_{12} = 0$. Iterando il procedimento, si ottiene, per $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots s$, $\lim_k |z_k - \overline{z}|_{ij} = 0$, che è quanto volevamo provare. Ciò completa la dimostrazione del teorema.

4. Dipendenza continua dal complesso coefficienti-dati.

Dai Teoremi 1 e 2 segue che la trasformazione funzionale

$$(M, d) \to z(\cdot; M, d) \, ,$$

da $\mathbf{M}^p(\Delta, \mathbf{R}^{n,n}) \times \mathbf{D}^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$ in $W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$, è continua rispetto ad ognuna delle variabili M, d, separatamente. È naturale a questo punto chiedersi se tale trasformazione sia continua rispetto al complesso delle variabili. La risposta a questa domanda è affermativa, e ciò è quanto vogliamo dimostrare in questo paragrafo. A questo scopo, cominciamo con l'osservare che la norma della trasformazione lineare e continua $d \to z(\cdot; M, d)$ può essere maggiorata con una costante che dipende solo da $||M||_{\mathbf{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})}$. Più precisamente, si ha il seguente

TEOREMA 3. *Denotata, per ogni $M \in \mathbf{M}^p(\Delta, \mathbf{R}^{n,n})$, con $k(M)$ la norma della trasformazione lineare e continua $d \to z(\cdot; M, d)$, da $\mathbf{D}^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$ in $W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$, e posto, per ogni $\delta > 0$,*

$$H(\delta) = \sup\left\{ k(M) \,:\, ||M||_{\mathbf{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})} \leq \delta \right\},$$

risulta $H(\delta) < \infty$ per ogni $\delta > 0$.

Dimostrazione.. Fissato $\delta > 0$, effettuiamo una decomposizione del rettangolo Δ in rettangoli $\Delta_{ij} =]a_{i-1}, a_i[\times]b_{j-1}, b_j[$, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, s$, dove $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_r = a$, $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_s = b$, in modo tale da aversi, per ogni $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, s$, $\mu_p(\Delta_{ij}) < 1/(2\delta)$, dove la quantità $\mu_p(\Delta_{ij})$ è definita dalla (3). Fissiamo inoltre le costanti β_{ij}, $i = 0, 1, \ldots, r$, $j = 0, 1, \ldots, s$, nel modo seguente;

$$\begin{aligned} &\beta_{0j} = \beta_{i0} = 0\,, \\ &\beta_{ij} = 1 + 2(\beta_{i-1j} + \beta_{ij-1} + \beta_{i-1j-1})\,. \end{aligned}$$

Sia ora (M, d), $M = (A, B, C)$, $d = \big((\varphi, \psi), f\big)$, un qualunque elemento di $\mathbf{M}^p(\Delta, \mathbf{R}^{n,n}) \times \mathbf{D}^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$. Come è noto (cfr. la dimostrazione del Teorema 3.1 di [3]), $z(\cdot; M, d)$ è limite, nella topologia di $\mathcal{W}_p(\Delta, \mathbf{R}^n)$, di ogni successione ricorrente $(z_k)_{k \in N}$,

$$z_k(x, y) = \tilde{z}(x, y) - \int_0^x \int_0^y (Lz_{k-1})(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \ , \ \ (x, y) \in \Delta \ , \ \ k \in N\,,$$

dove L è l'operatore differenziale lineare

$$Lz = Az_x + Bz_y + Cz\,,$$

$\tilde{z}$ è l'elemento di $W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$ dato da

$$\tilde{z}(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \quad , \quad (x, y) \in \Delta\,,$$

e z_0 è un qualsiasi elemento di $\mathcal{W}_p(\Delta, \mathbf{R}^n)$. In particolare, scegliendo $z_0 = 0$, si ha, nella topologia di $\mathcal{W}_p(\Delta, \mathbf{R}^n)$,

$$z(\cdot; M, d) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k\,, \tag{5}$$

dove $w_k = z_k - z_{k-1}$, $k \in N$ (in particolare $w_1 = \tilde{z}$). Continuando ad adottare la notazione (2), introdotta nel caso della dimostrazione del Teorema 2, si ottiene, per ogni $k \in N$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, s$, ragionando come in [3], la maggiorazione

$$\begin{aligned}|w_{k+1}|_{ij} \leq |w_{k+1}|_{i-1j} &+ |w_{k+1}|_{ij-1} \\ &+ |w_{k+1}|_{i-1j-1} + \mu_p(\Delta_{ij}) \, \|M\|_{\mathbf{M}^p(\Delta, \mathbf{R}^{n,n})} |w_k|_{ij} ,\end{aligned}$$

da cui, per la scelta effettuata dalla decomposizione di Δ,

$$|w_{k+1}|_{ij} \leq |w_{k+1}|_{i-1j} + |w_{k+1}|_{ij-1} + |w_{k+1}|_{i-1j-1} + \frac{1}{2} |w_k|_{ij} .$$

Dall'ultima disuguaglianza si deduce, per ogni $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, s$,

$$\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} |w_k|_{ij} \leq \frac{1}{2} |w_1|_{ij} + \sum_{k=2}^{\infty} \big(|w_k|_{i-1j} + |w_k|_{ij-1} + |w_k|_{i-1j-1}\big) .$$

Conseguentemente, per ogni $i = 0, 1, \dots, r$, $j = 0, 1, \dots, s$, risulta

$$\sum_{k=2}^{\infty} |w_k|_{ij} \leq \beta_{ij} \, \|\tilde{z}\|_{\mathcal{W}_p(\Delta, \mathbf{R}^n)} . \tag{6}$$

Infatti, la (6) è ovvia se $i = 0$ oppure $j = 0$; d'altra parte, la validità della (6) per le coppie di indici $(i-1, j)$, $(i, j-1)$, $(i-1, j-1)$ implica che la (6) è verificata anche per la coppia di indici (i, j); si ha, invero, tenuta presente la definizione delle costanti β_{ij},

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty} |w_k|_{ij} &\leq |w_1|_{ij} + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \big(|w_k|_{i-1j} + |w_k|_{ij-1} + |w_k|_{i-1j-1}\big) \leq \\ &\leq \|\tilde{z}\|_{\mathcal{W}_p(\Delta, \mathbf{R}^n)} + 2\big(\beta_{i-1j} + \beta_{ij-1} + \beta_{i-1j}\big) \|\tilde{z}\|_{\mathcal{W}_p(\Delta, \mathbf{R}^n)} = \\ &= \beta_{ij} \, \|\tilde{z}\|_{\mathcal{W}_p(\Delta, \mathbf{R}^n)} .\end{aligned}$$

Dalla (5) e dalla (6) si ottiene per ogni $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, s$,

$$|z(\cdot; M, d)|_{ij} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|_{ij} \leq (1 + \beta_{ij}) \, \|\tilde{z}\|_{\mathcal{W}_p(\Delta, \mathbf{R}^n)} ;$$

conseguentemente

$$||z(\cdot;M,d)||_{\mathcal{W}_p(\Delta,\mathbf{R}^n)} \leq \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}|z(\cdot;M,d)|_{ij} \leq$$
$$\leq \left(rs+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\beta_{ij}\right)||\tilde{z}||_{\mathcal{W}_p(\Delta,\mathbf{R}^n)}.$$

D'altra parte si ha, come è facile verificare,

$$||\tilde{z}||_{\mathcal{W}_p(\Delta,\mathbf{R}^n)} \leq \gamma\,||d||_{\mathbf{D}^p(\Delta,\mathbf{R}^n)}\,,$$

essendo γ una costante che dipende solo dal rettangolo Δ; si ha inoltre (cfr. le considerazioni che precedono la Proposizione 7)

$$||z(\cdot;M,d)||_{W_p^*(\Delta,\mathbf{R}^n)} \leq \gamma_1 \,|\!|\!| z(\cdot;M,d) |\!|\!|_{W_p^*(\Delta,\mathbf{R}^n)}\,,$$

dove anche la costante γ_1 dipende solo dal rettangolo Δ. Si ha allora, tenuto conto del Lemma 1,

$$\begin{aligned}
&||z(\cdot;M,d)||_{W_p^*(\Delta,\mathbf{R}^n)}\\
&\quad\leq \gamma_1\big(||z(\cdot;M,d)||_{\mathcal{W}_p(\Delta,\mathbf{R}^n)}+||z_{xy}(\cdot;M,d)||_{L^p(\Delta,\mathbf{R}^n)}\big)\\
&\quad= \gamma_1\big(||z(\cdot;M,d)||_{\mathcal{W}_p(\Delta,\mathbf{R}^n)}+||-Lz(\cdot;M,d)+f||_{L^p(\Delta,\mathbf{R}^n)}\big)\\
&\quad\leq \gamma_1\big(||z(\cdot;M,d)||_{\mathcal{W}_p(\Delta,\mathbf{R}^n)}\\
&\qquad+||Lz(\cdot;M,d)||_{L^p(\Delta,\mathbf{R}^n)}+||f||_{L^p(\Delta,\mathbf{R}^n)}\big)\\
&\quad\leq \gamma_1\big(||z(\cdot;M,d)||_{\mathcal{W}_p(\Delta,\mathbf{R}^n)}\\
&\qquad+||M||_{\mathbf{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})}||z(\cdot;M,d)||_{\mathcal{W}_p(\Delta,\mathbf{R}^n)}+||d||_{\mathbf{D}^p(\Delta,\mathbf{R}^n)}\big)\\
&\quad\leq \gamma_1\left\{\big(1+||M||_{\mathbf{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})}\big)\left(rs+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\beta_{ij}\right)||\tilde{z}||_{\mathcal{W}_p(\Delta,\mathbf{R}^n)}+||d||_{\mathbf{D}^p(\Delta,\mathbf{R}^n)}\right\}\\
&\quad\leq \gamma_1\left\{\big(1+||M||_{\mathbf{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})}\big)\left(rs+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\beta_{ij}\right)\gamma+1\right\}||d||_{\mathbf{D}^p(\Delta,\mathbf{R}^n)}\,.
\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di $d \in \mathbf{D}^p(\Delta,\mathbf{R}^n)$, risulta

$$k(M) \leq \gamma_1\left\{\big(1+||M||_{\mathbf{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})}\big)\left(rs+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\beta_{ij}\right)\gamma+1\right\},$$

e quindi

$$\sup\left\{k(M) : ||M||_{\mathbf{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})} \leq \delta\right\} \leq$$
$$\leq \gamma_1\left\{(1+\delta)\left(rs + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\beta_{ij}\right)\gamma + 1\right\},$$

ciò che completa la dimostrazione del teorema.

Siamo adesso in grado di provare il

TEOREMA 4. *La trasformazione funzionale*

$$(M, d) \to z(\cdot; M, d)$$

da $\mathbf{M}^p(\Delta, \mathbf{R}^{n,n}) \times \mathbf{D}^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$ *in* $W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$, *è continua.*

Dimostrazione.. Sia $\left((M_k, d_k)\right)_{k\in N}$ una successione di elementi di $\mathbf{M}^p(\Delta, \mathbf{R}^{n,n}) \times \mathbf{D}^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$, ivi convergente verso $(\overline{M}, \overline{d})$. Si ha, per ogni $k \in N$,

$$||z(\cdot; M_k, d_k) - z(\cdot; \overline{M}, \overline{d})||_{W_p^*(\Delta,\mathbf{R}^n)} \leq ||z(\cdot; M_k, d_k - \overline{d})||_{W_p^*(\Delta,\mathbf{R}^n)}$$
$$+ ||z(\cdot; M_k, \overline{d}) - z(\cdot; \overline{M}, \overline{d})||_{W_p^*(\Delta,\mathbf{R}^n)}$$

ed è $\lim_k ||z(\cdot; M_k, \overline{d}) - z(\cdot; \overline{M}, \overline{d})||_{W_p^*(\Delta,\mathbf{R}^n)} = 0$ in virtù del Teorema 2. D'altra parte, per il Teorema 3, posto

$$l = \sup_k ||M_k||_{\mathbf{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})},$$

risulta $H(l) < \infty$, da cui

$$\lim_k ||z(\cdot; M_k, d_k - \overline{d})||_{W_p^*(\Delta,\mathbf{R}^n)} = 0.$$

Si ha pertanto

$$\lim_k z(\cdot; M_k, d_k) = z(\cdot; \overline{M}, \overline{d})$$

in $W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$. Il teorema è così dimostrato.

Nel corso della dimostrazione del Teorema 4 abbiamo implicitamente utilizzato il fatto (ovvia conseguenza del TEOREMA 3) che la trasformazione lineare $d \longrightarrow z(\cdot; M, d)$, da $\mathbf{D}^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$ in $W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$, è continua, uniformemente al variare di M in ogni insieme limitato di $\mathbf{M}^p(\Delta, \mathbf{R}^{n,n})$. È naturale allora chiedersi se una proprietà analoga valga anche per la trasformazione $M \longrightarrow z(\cdot; M, d)$. Una attenta rilettura della dimostrazione del Teorema 2 alla luce del Teorema 3 consente di dare risposta affermativa a questa domanda e di ottenere conseguentemente una formulazione più precisa del Teorema 4.

TEOREMA 5. *La trasformazione funzionale*

$$(M, d) \longrightarrow z(\cdot; M, d),$$

da $\mathbf{M}^p(\Delta, \mathbf{R}^{n,n}) \times \mathbf{D}^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$ *in* $W_p^*(\Delta, \mathbf{R}^n)$, *è lipschitziana in ogni insieme limitato di* $\mathbf{M}^p(\Delta, \mathbf{R}^{n,n}) \times \mathbf{D}^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$.

Dimostrazione.. Sia $\delta > 0$ e siano (M_1, d_1), $(\overline{M}, \overline{d})$ due qualsiasi elementi di $\mathbf{M}^p(\Delta, \mathbf{R}^{n,n}) \times \mathbf{D}^p(\Delta, \mathbf{R}^n)$ aventi norma non superiore a δ. Si ha

$$\begin{aligned} &||z(\cdot; M_1, d_1) - z(\cdot; \overline{M}, \overline{d})||_{W_p^*(\Delta,\mathbf{R}^n)} \\ &\qquad \le ||z(\cdot; M_1, d_1 - \overline{d})||_{W_p^*(\Delta,\mathbf{R}^n)} \\ &\qquad\quad + ||z(\cdot; M_1, \overline{d}) - z(\cdot; \overline{M}, \overline{d})||_{W_p^*(\Delta,\mathbf{R}^n)} . \end{aligned}$$

Per il Teorema 3 risulta

$$||z(\cdot; M_1, d_1 - \overline{d})||_{W_p^*(\Delta,\mathbf{R}^n)} \le H(\delta)\, ||d_1 - \overline{d}||_{\mathbf{D}^p(\Delta,\mathbf{R}^n)} ;$$

d'altra parte

$$\begin{aligned} &||z(\cdot; M_1, \overline{d}) - z(\cdot; \overline{M}, \overline{d})||_{W_p^*(\Delta,\mathbf{R}^n)} \\ &\qquad \le \gamma_1 \| z(\cdot; M_1, \overline{d}) - z(\cdot; \overline{M}, \overline{d}) \|_{W_p^*(\Delta,\mathbf{R}^n)} \\ &\qquad = \gamma_1 \big(||z(\cdot; M_1, \overline{d}) - z(\cdot; \overline{M}, \overline{d})||_{\mathcal{W}_p(\Delta,\mathbf{R}^n)} \\ &\qquad\quad + ||z_{xy}(\cdot; M_1, \overline{d}) - z_{xy}(\cdot; \overline{M}, \overline{d})||_{L^p(\Delta,\mathbf{R}^n)} \big) , \end{aligned}$$

con γ_1 costante che dipende solo dal rettangolo Δ; inoltre, ragionando come per il Teorema 2,

$$\begin{aligned} &||z_{xy}(\cdot; M_1, \overline{d}) - z_{xy}(\cdot; \overline{M}, \overline{d})||_{L^p(\Delta,\mathbf{R}^n)} \\ &\qquad \le ||\overline{M} - M_1||_{\mathbf{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})}\, ||z(\cdot; \overline{M}, \overline{d})||_{\mathcal{W}_p(\Delta,\mathbf{R}^n)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ ||M_1||_{\mathrm{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})} \, ||z(\cdot;\overline{M},\overline{d}) - z(\cdot;M_1,\overline{d})||_{\mathcal{W}_p(\Delta,\mathbf{R}^n)} \\
&\leq ||\overline{M} - M_1||_{\mathrm{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})} \, k(\overline{M}) \, ||\overline{d}||_{\mathrm{D}^p(\Delta,\mathbf{R}^n)} \\
&\quad + \delta \, ||z(\cdot;\overline{M},\overline{d}) - z(\cdot;M_1,\overline{d})||_{\mathcal{W}_p(\Delta,\mathbf{R}^n)} \\
&\leq H(\delta) \, \delta \, ||\overline{M} - M_1||_{\mathrm{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})} \\
&\quad + \delta \, ||z(\cdot;\overline{M},\overline{d}) - z(\cdot;M_1,\overline{d})||_{\mathcal{W}_p(\Delta,\mathbf{R}^n)} .
\end{aligned}
$$

È pertanto sufficiente dimostrare che esiste una costante c, dipendente solo da δ, tale da aversi

$$||z(\cdot;\overline{M},\overline{d}) - z(\cdot;M_1,\overline{d})||_{\mathcal{W}_p(\Delta,\mathbf{R}^n)} \leq c \, ||\overline{M} - M_1||_{\mathrm{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})} .$$

A tale scopo, posto per brevità

$$z_1 = z(\cdot;M_1,\overline{d}) \quad , \quad \overline{z} = z(\cdot;\overline{M},\overline{d}) ,$$

ed effettuata una decomposizione di Δ in rettangoli $\Delta_{ij} =]a_{i-1}, a_i[\times \times]b_{j-1}, b_j[$, $i = 1,\ldots,r$, $j = 1,\ldots,s$, dove $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_r = a$, $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_s = b$, si ottengono, adottando la notazione (2), e ragionando come per il Teorema 2, le maggiorazioni

$$
\begin{aligned}
(8) \qquad |z_1 - \overline{z}|_{ij} \leq\; & |z_1 - \overline{z}|_{i-1j} + |z_1 - \overline{z}|_{ij-1} + |z_1 - \overline{z}|_{i-1j-1} \\
& \lambda_1 \, ||\overline{M} - M_1||_{\mathrm{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})} + \lambda_2 \, |z_1 - \overline{z}|_{ij} , \\
& \qquad\qquad i = 1,\ldots,r \, , \; j = 1,\ldots,s ,
\end{aligned}
$$

dove

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \max_{i,j} \mu_p(\Delta_{ij}) \, |\overline{z}|_{ij} , \\
\lambda_2 &= \max_{i,j} \mu_p(\Delta_{ij}) \, ||M_1||_{\mathrm{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})} ,
\end{aligned}
$$

con $\mu_p(\Delta_{ij})$ definito dalla (3). Supponiamo di avere fissato la decomposizione di Δ in modo che $\max_{i,j} \mu_p(\Delta_{ij}) \leq 1/(2\delta)$. Si ha allora dalla (8)

$$
\begin{aligned}
(9) \qquad \frac{1}{2} \, |z_1 - \overline{z}|_{ij} \leq\; & |z_1 - \overline{z}|_{i-1j} + |z_1 - \overline{z}|_{ij-1} \\
& + |z_1 - \overline{z}|_{i-1j-1} + \frac{1}{2} \, H(\delta) \, ||\overline{M} - M_1||_{\mathrm{M}^p(\Delta,\mathbf{R}^{n,n})} \\
& \qquad\qquad i = 1,\ldots,r \, , \; j = 1,\ldots,s .
\end{aligned}
$$

Dalla (9), con procedimento iterativo, segue

$$|z_1 - \overline{z}|_{ij} \leq c_{ij}\, ||\overline{M} - M_1||_{M^p(\Delta, \mathbf{R}^{n,n})}$$

con c_{ij} costante che dipende solo da δ. Pertanto posto $c = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} c_{ij}$, si ha la (7). Ciò completa la dimostrazione del teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] Benedek A., Panzone R., *The Spaces L^P, with mixed norm*, Duke Math. J., 28 (1961), 301-324.

[2] Di Vincenzo R., Villani A., *Sopra un problema ai limiti per un'equazione lineare del terzo ordine di tipo iperbolico. Esistenza, unicità e rappresentazione della soluzione*, Le Matematiche, 32 (1977), 211-238.

[3] Emmanuele G., Villani A., *A Linear Hyperbolic System and an Optimal Control Problem*, Journal of Optimization Theory and Applications, 44, (1984), 213-229.

[4] Suryanarayana M.B., *A Sobolev Space and a Darboux Problems*, Pacific J. Math., 69 (1977), 535-550.

[5] Suryanarayana M.B., *On Multidimensional Integral Equations of Volterra Type*, Pacific J. Math., 41 (1972), 809-828.

[6] Villani A., *On an Optimal Control Problem for a Distributed Parameter Control Process with Unbounded Coefficients*, Journal of Optimization Theory and Applications, 34 (1981), 561-577.

Dipartimento di Matematica
Viale A. Doria, 6
95125 Catania