NUOVI CONTRIBUTI ALLA DIFFERENZIABILITÀ DELLE SOLUZIONI DEBOLI DI SISTEMI PARABOLICI NON LINEARI DI ORDINE $2m$ AD ANDAMENTO QUADRATICO

LUISA FATTORUSSO (Reggio Calabria) (*) (**)

In this paper we improve on the results of [6] on the local differentiability of the weak solutions of the non linear parabolic systems of order $2m$ with quadratic growth

$$\sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}a^{\alpha}(X,Du)+\frac{\partial u}{\partial t}=0,$$

with $X=(x,t)\in Q=\Omega\times(-T,0)$,

$$a^{\alpha}:Q\times\left(\prod_{|\alpha|\leq m}\mathbb{R}^N_{\alpha}\right)\to\mathbb{R}^N, N,m\in N-\{1\}.$$

1. In un recente lavoro (cfr.: L. Fattorusso [6], Teorema 2. III) ho stabilito risultati di differenziabilità locale per le soluzioni $u\in L^2(-T,0,H^m(\Omega,\mathbb{R}^N))\cap C^{m-1,\lambda}(\bar{Q},\mathbb{R}^N)$ ([1]) (m,N interi >1, $\lambda\in(0,1)$)

(*) Entrato in Redazione il 4 ottobre 1988

(**) Lavoro eseguito con contributo finanziario del M.P.I. e nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

([1]) Qui e nel seguito la hölderianità è intesa rispetto alla metrica parabolica

$$d(X,Y)=\max\{||x-y||,\ |t-\tau|^{1/2m}\},\ X=(x,t),\ Y=(y,\tau).$$

del sistema parabolico non lineare di ordine $2m$ ad andamento quadratico:

$$\sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}a^{\alpha}(X,Du)+\frac{\partial u}{\partial t}=0\ (^2). \tag{1.1}$$

In seguito a una conversazione avuta sull'argomento con M. Marino, mi sono accorta che la tecnica utilizzata per dimostrare il Teorema 2.III di [6] consente di acquisire i medesimi risultati di differenziabilità, per le soluzioni $u \in L^2(-T,0,H^m(\Omega,\mathbb{R}^N))\cap C^0([-T,0],H^{m-1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^N))$ del sistema (1,1) tali che (3)

$$D^{\alpha}u \in C^{0,\lambda}(\bar{Q},\mathbb{R}^N),\ \forall\alpha : |\alpha| = m-1(^3).$$

Quest'ultima ipotesi appare più naturale di quella che figura nell'enunciato del Teorema 2.III di [6] ($u \in C^{m-1,\lambda}(\bar{Q},\mathbb{R}^N)$), in quanto l'hölderianità è richiesta per le sole derivate spaziali di ordine $m-1$.

Aggiungendo poi una conveniente ipotesi di regolarità in t su queste derivate spaziali ($D^{\alpha}u \in H^{(1+\theta)/2m}(-a,0,L^2(B(\sigma),\mathbb{R}^n))$, $\frac{n+2m}{n+2m+4\lambda} < \theta < 1$, $|\alpha| = m-1$) è possibile, grazie ad un opportuno teorema d'interpolazione (che verrà provato nel n. 3), migliorare i risultati di differenziabilità di [6] (cfr. il Teorema (4.1)).

La nomenclatura ed il simbolismo sono quelli di [6]. Ne diamo brevi cenni rimandando a [6] per maggiori dettagli.

2. Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, di punto generico $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, T un numero reale positivo e Q il cilindro $\Omega\times(-T,0)$.

---

(2) Se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ è un multiindice, porremo, come d'abitudine,

$$|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n,\ D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\ldots D_n^{\alpha_n},\ D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}:$$

se u è una funzione di Q in $\mathbb{R}^N$, scriveremo

$$Du = \{D^{\alpha}u\}_{|\alpha|\leq m},\ D'u = \{D^{\alpha}u\}_{|\alpha|=m},\ D''u = \{D^{\alpha}u\}_{|\alpha|<m}.$$

(3) Cfr. il Teorema (2.1)

Denotiamo con X il punto (x,t) di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, con $B(x^0,\sigma)$ il cubo di $\mathbb{R}^n$:

$$B(x^0,\sigma) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i - x_i^0| < \sigma,\ i = 1,2,\dots,n\},$$

dove $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ e $\sigma > 0$, e con $Q(\mathcal{X}^0,\sigma)$ il cilindro $B(x^0,\sigma) \times (t^0 - \sigma^{2m}, t^0)$, $X^0 = (x^0,t^0)$.

Nel cilindro Q prenderemo in esame il seguente sistema parabolico nonlineare di ordine $2m$

$$\sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a^\alpha(X, Du) + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{2.1}$$

dove $a^\alpha(X,p)$, $|\alpha| \le m$, sono vettori di $\mathbb{R}^N$, definiti in $\Lambda = Q \times \mathcal{R}$ (4), soddisfacenti le seguenti condizioni (5):

(2.2) *i vettori $a^\alpha(X,p)$, $|\alpha| < m$, sono misurabili in X $\forall\ p \in \mathcal{R}$, continui in p $\forall X \in Q$, e per ogni $(X,p) \in \Lambda$ con $\|p''\| \le K$*

$$\|a^\alpha(X,p)\| \le M(K)\{f^\alpha(X) + \|p'\|^2\}$$

dove $f^\alpha \in L^2(Q)$;

(2.3) *i vettori $a^\alpha(X,p)$, $|\alpha| = m$, sono di classe C^1 in $\bar{Q} \times \mathcal{R}$ e per ogni $(X,p) \in \Lambda$ con $\|p''\| \le k$*

$$\|a^\alpha\| + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial a^\alpha}{\partial x_i} \right\| + \sum_{|\beta|<m} \sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{\partial a^\alpha}{\partial p_k^\beta} \right\| \le M(K)\{1 + \|p'\|\},$$

$$\sum_{|\beta|=<m} \sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{\partial a^\alpha}{\partial p_k^\beta} \right\| \le M(K);$$

(2.4) *esiste $\mu(K) > 0$ tale che*

$$\sum_{h,k=1}^{N} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \frac{\partial a_h^\alpha(X,p)}{\partial p_k^\beta} \xi_h^\alpha \xi_k^\beta \ge \mu(K) \sum_{|\alpha|=m} \|\xi^\alpha\|^2$$

(4) $\mathcal{R}$ denota il prodotto cartesiano $\prod_{|\alpha|\le m} \mathbb{R}_\alpha^N$, $p = \{p^\alpha\}_{|\alpha|\le m}, p^\alpha \in \mathbb{R}^N$, il generico vettore di $\mathcal{R}$.

(5) Vedi le ipotesi (1.2), (1.3) e (1.4) di [6].

per ogni sistema $\{\xi^\alpha\}_{|\alpha|=m}$ *di vettori di* $\mathbb{R}^N$ *e per ogni* $(X,p) \in \Lambda$ *con* $\|p''\| \leq K$.

Per soluzione del sistema (2.1) intenderemo, come in [6], un vettore $u \in L^2(-T,0,H^m(\Omega,\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty(-T,0,H^{m-1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^N))$ tale che

$$\int_Q \left\{ \sum_{|\alpha|\leq m} (a^\alpha(X,Du)|D^\alpha\varphi) - \left(u|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \right\} dX = 0 \tag{2.5}$$

$\forall\varphi \in L^2(-T,0,H_0^m(\Omega,\mathbb{R}^N)) \cap H^1(-T,0,L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty(-T,0,H^{m-1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^N)) : \varphi(x,-T) = \varphi(x,0) = 0$ in Ω.

Sussistono i seguenti lemmi.

LEMMA (2.1). *Se* $u \in L^2(-T,0,H^m(\Omega,\mathbb{R}^N)) \cap C^0([-T,0],H^{m-1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^N))$ *è una soluzione del sistema (2.5), tale che*

$$D^\alpha u \in C^{0,\lambda}(\bar{Q},\mathbb{R}^N),\ \forall\alpha : |\alpha| = m-1,\ \lambda \in (0,1), \tag{2.6}$$

se valgono le ipotesi (2.2), (2.3), (2.4), allora, $\forall B(3\sigma) = B(x^0,3\sigma) \subset\subset \Omega$, $\forall a,b \in (0,T)$, $a < b$

$$u \in L^2(-a,0,H^{m+\theta}(B(\sigma),\mathbb{R}^N)),\ \forall\theta \in \left(0,\frac{\lambda}{2}\right), \tag{2.7}$$

e si ha la seguente maggiorazione:

$$\int_{-a}^{0} |D'u|^2_{\theta,B(\sigma)}dt \leq c(\mu,K,U,\vartheta,\sigma,b,m,n) \left\{ 1 + \int_Q \sum_{|\alpha|<m} |f^\alpha| dX + \int_{-b}^{0} |u|^2_{m,B(3\sigma)}dt \right\}, \tag{2.8}$$

dove $K = \sup_Q \|D''u\|$, $u = \sum_{|\alpha|=m-1} [D^\alpha u]_{\lambda,\bar{Q}}$.

Dimostrazione. Fissati $B(3\sigma) = B(x^0,3\sigma) \subset\subset \Omega$ e $a,b \in (0,T)$ con $a < b$; siano $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\rho_\nu(t) \in C^0(\mathbb{R})$, ν intero $> \dfrac{2}{a}$, le funzioni reali soddisfacenti le proprietà (2.3) e (2.4) di [6].

Procedendo come nella dimostrazione del Teorema 2.I di [6] si ottiene che (cfr. la (2.11) di [6])

$$(2.9)\quad \mu \int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^{2m}\rho_\nu^2 \|\tau_{i,h}D'u\|^2 dx \leq$$

$$\leq - \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \sum_{\gamma<\alpha} \sum_{k=1}^{N} \int_Q \psi^m \rho_\nu^2 C_{\alpha\gamma}(\psi) \left(\tau_{i,h} D^\beta u_k \frac{\widetilde{\partial a^\alpha}}{\partial p_k^\beta} | \tau_{i,h} D^\gamma u \right) dX -$$

$$- \sum_{|\alpha|=m} \sum_{|\beta|<m} \sum_{k=1}^{N} \int_Q \left(\tau_{i,h} D^\beta u_k \frac{\widetilde{\partial a^\alpha}}{\partial p_k^\beta} | D^\alpha (\psi^{2m} \rho_\nu^2 \tau_{i,h} u) \right) dX -$$

$$- h \sum_{|\alpha|=m} \int_Q \left(\frac{\widetilde{\partial a^\alpha}}{\partial x_i} | D^\alpha (\psi^{2m} \rho_\nu^2 \tau_{i,h} u) \right) dX + \int_Q \psi^{2m} \rho_\nu \rho_\nu' \|\tau_{i,h} u\|^2 dX -$$

$$- \sum_{|\alpha|<m} \int_Q (a^\alpha(X, Du) | \tau_{i,-h} D^\alpha (\psi^{2m} \rho_\nu^2 \tau_{i,h} u)) dX = A + B + C + D + E,$$

con i intero positivo $\leq n$, h numero reale, $|h| < \sigma$,

$$|C_{\alpha\gamma}(\psi)| \leq c(m,n)/\sigma^{m-|\gamma|}, \quad \sum_{|\beta|=m} \sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{\widetilde{\partial a^\alpha}}{\partial p_k^\beta} \right\| \leq M(K),$$

$$\left\| \frac{\widetilde{\partial a^\alpha}}{\partial x_i} \right\| + \sum_{|\beta|<m} \sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{\widetilde{\partial a^\alpha}}{\partial p_k^\beta} \right\| \leq M(K)\{1 + \|D'u\| + \|\tau_{i,h} D'u\|\}.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$, si ha:

$$|A| \leq C(K, \sigma, m, n) \int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^m \rho_\nu^2 \|\tau_{i,h} D'u\| \, \|\tau_{i,h} D''u\| dx \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} \int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^{2m} \rho_\nu^2 \|\tau_{i,h} D'u\|^2 dx + C(K, \sigma, m, n, \varepsilon) \cdot$$

$$\cdot \int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(2\sigma)} \|\tau_{i,h} D''u\|^2 dx,$$

e quindi dal Lemma 2.I di [5] si deduce la (2.15) di [6].

$$(2.10)\quad |A| \le \frac{\varepsilon}{3}\int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^{2m}\rho_\nu^2 ||\tau_{i,h} D' u||^2 dx +$$

$$+ h^2 C(K,\sigma,b,m,n,\varepsilon)\left\{1 + \int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(3\sigma)} ||D'u||^2 dx\right\}.$$

Analogamente si ha, per ogni $\varepsilon > 0$ (cfr. la (2.17) di [6]):

$$(2.11)\quad |B| \le \int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(2\sigma)} \left\{\frac{\varepsilon}{3} + C(K)(||\tau_{i,h} D'' u|| + \right.$$

$$\left. + ||\tau_{i,h} D'' u||^2)\right\}\psi^{2m}\rho_\nu^2 ||\tau_{i,h} D' u||^2 dx + h^2 C(K,\sigma,b,m,n,\varepsilon)\cdot$$

$$\cdot\left\{1 + \int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(3\sigma)} ||D'u||^2 dx\right\} +$$

$$+ C(K,\varepsilon)\int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^{2m}\rho_\nu^2 ||\tau_{i,h} D'' u||^2 ||D'u||^2 dx.$$

Essendo poi $u \in C^0([-T,0], H^{m-1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N))$ e $D^\alpha u \in C^{0,\lambda}(\bar{Q}, \mathbb{R}^N)$, $\forall \alpha : |\alpha| = m-1$, risulta ancora verificata la maggiorazione:

$$||\tau_{i,h} D'' u(X)|| \le C(K,U,\sigma,m,n)|h|^\lambda,\ \forall X = (x,t) \in B(2\sigma) \times \left(-b, -\frac{1}{\nu}\right),$$

e quindi la (2.11) diventa

$$(2.12)\, |B| \le \left\{\frac{\varepsilon}{3} + C(K,U,\sigma,m,n)(|h|^\lambda + |h|^{2\lambda}\right\}\cdot$$

$$\cdot \int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^{2m}\rho_\nu^2 ||\tau_{i,h} D' u||^2 dx +$$

$$+C(K,U,\sigma,b,m,n,\varepsilon)(h^2+h^{2\lambda})\cdot\left\{1+\int_{-b}^{-1/\nu}dt\int_{B(3\sigma)}\|D'u\|^2dx\right\}.$$

Similmente, applicando il Lemma 2.I di [5] e facendo uso delle ipotesi (2.2), (2.6) e $u\in C^0([-T,0],H^{m-1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^N))$, si ottengono le maggiorazioni (2.20), (2.21), (2.22) di [6], di $|C|$, D ed $|E|$ e quindi la (2.23) di [6].

Partendo ora dalla (2.23) di [6] e procedendo come nella dimostrazione del Teorema 2.I di [6], si perviene alle (2.7) e (2.8). ■

LEMMA (2.2). *Se* $u\in L^2(-T,0,H^{m+\vartheta}(\Omega,\mathbb{R}^N))\cap C^0([-T,0],H^{m-1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^N)),0<\vartheta<1$, *è una soluzione del sistema (2.5), soddisfacente la (2.6), se valgono le ipotesi (2.2), (2.3), (2.4), allora,* $\forall B(3\sigma)=B(x^0,3\sigma)\subset\subset\Omega$, $\forall a,b\in(0,T)$, $a<b$

$$(2.13)\qquad u\in L^2(-a,0,H^{m+\vartheta_1}(B(\sigma),\mathbb{R}^N)),\ \forall\vartheta_1\in\left(0,\vartheta+\frac{\lambda}{2}(1-\vartheta)\right),$$

e si ha la seguente maggiorazione:

$$(2.14)\qquad \int_{-a}^{0}|D'u|^2_{\vartheta_1,B(\sigma)}dt\le C(\mu,K,U,\vartheta,\vartheta_1,\lambda,\sigma,b,m,n)$$

$$\left\{1+\int_Q\sum_{|\alpha|<m}|f^\alpha|^{1+\vartheta}dX+\int_{-b}^{0}(|u|^2_{m,B(3\sigma)}+|D'u|^2_{\vartheta,B(3\sigma)})dt\right\}.$$

Dimostrazione. Basta procedere con la stessa tecnica utilizzata per dimostrare il Teorema 2.II di [6]. L'appartenenza, per q.o.t $\in(-T,0)$ e per ogni cubo $B(\rho)=B(x^0,\rho)\subset\subset\Omega$, di $u(x,t)$ allo spazio $H^{m,p}(B(\rho),\mathbb{R}^N)$, $\forall 2<p<q=\dfrac{2(1+\vartheta)n}{n-2\vartheta\lambda}$, e la relativa maggiorazione ([6]), sono stavolta conseguenze delle ipotesi

$$u\in L^2(-T,0,H^{m+\vartheta}(\Omega,\mathbb{R}^N)),\ D^\alpha u\in C^{0,\lambda}(\bar{Q},\mathbb{R}^N),$$

$$\forall\alpha:|\alpha|=m-1,\ 0<\vartheta,\lambda<1.$$ ■

([6]) Cfr. la (2.32) di [6].

Dai Lemmi (2.1) e (2.2), facendo uso del metodo iterativo adoperato in [5] (cfr. anche [4]), segue il preannunciato risultato di differenziabilità per le soluzioni del sistema (2.5).

TEOREMA (2.1). *Se* $u \in L^2(-T, 0, H^m(\Omega, \mathbb{R}^N)) \cap C^0([-T, 0], H^{m-1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N))$ *è una soluzione del sistema (2.5), soddisfacente la (2.6), se valgono le ipotesi (2.2), (2.3), (2.4), allora,* $\forall B(\sigma) \subset\subset B(\sigma_0) \subset\subset \Omega$, $\forall a, b \in (0, T)$, $a < b$

$$u \in L^2(-a, 0, H^{m+\vartheta}(B(\sigma), \mathbb{R}^N)), \ \forall \vartheta \in (0,1), \tag{2.15}$$

e si ha la seguente maggiorazione:

$$\int_{-a}^{0} |D'u|^2_{\vartheta, B(\sigma)} dt \le C(\mu, K, U, \vartheta, \lambda, \sigma, \sigma_0, a, b, m, n) \cdot \left\{ 1 + \int_Q \sum_{|\alpha|<m} |f^\alpha|^{1+\vartheta} dX + \int_{-b}^{0} |u|^2_{m, B(\sigma_0)} dt \right\}. \tag{2.16}$$

■

3. Scopo di questo numero è quello di provare il seguente risultato di interpolazione.

TEOREMA (3.1). *Siano* a, λ *due numeri reali positivi con* $\lambda < 1$, $B(\sigma)$ *un cubo di* $\mathbb{R}^n$. *Se*

$$u \in L^2(-a, 0, H^{m+\vartheta}(B(\sigma), \mathbb{R}^N)), \ \vartheta \in \left(\frac{n+2m}{n+2m+4\lambda}, 1 \right),$$

e

$$D^\gamma u \in C^{0,\lambda}(\overline{B(\sigma) \times (-a, 0)}, \mathbb{R}^N) \cap H^{\frac{1+\vartheta}{2m}}(-a, 0, L^2(B(\sigma), \mathbb{R}^N)), \tag{3.1}$$

$$\forall \gamma : |\gamma| = m - 1,$$

allora

$$D^\alpha u \in L^4(B(\sigma) \times (-a, 0), \mathbb{R}^N), \quad \forall \alpha : |\alpha| = m, \tag{3.2}$$

e si ha la seguente maggiorazione

$$(3.3)\qquad \int_{-a}^{0} dt \int_{B(\sigma)} \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u - (D^\alpha u)_{B(\sigma)\times(-a,0)}||^4 dx \leq$$

$$\leq C(m,n,\vartheta,\lambda)[mis(B(\sigma)\times(-a,0))]^{1-\frac{4}{q}}\cdot$$

$$\left(\sum_{|\gamma|=m-1} [D^\gamma u]^2_{\lambda,\overline{B(\sigma)\times(-a,0)}}\right)^{\frac{2\vartheta}{1+\vartheta}} \left\{\int_{-a}^{0} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2_{\vartheta,B(\sigma)} dt + \right.$$

$$\left. + \int_{-a}^{0} dt \int_{-a}^{0} d\xi \int_{B(\sigma)} \sum_{|\gamma|=m-1} \frac{||D^\gamma u(x,t) - D^\gamma u(x,\xi)||^2}{|t-\xi|^{1+\frac{1+\vartheta}{m}}} dx \right\}^{\frac{2}{1+\vartheta}}$$

con $q = \dfrac{2(1+\vartheta)(n+2m)}{n+2m-2\lambda\vartheta}$ (7).

Dimostrazione. Sia $\Delta : B(\sigma)\times(-a,0) = \bigcup_k Q(\sigma_k)$, $Q(\sigma_k) = B(\sigma_k)\times(t_k^0 - \sigma_k^{2m}, t_k^0)$, una partizione di $B(\sigma)\times(-a,0)$ in cubi a due a due senza punti interni comuni. Valutiamo l'integrale

$$\int_{Q(\sigma_k)} \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u - (D^\alpha u)_{Q(\sigma_k)}||^2 dX,$$

relativo al generico cubo $Q(\sigma_k)$ della partizione Δ.

Essendo:

$$(3.4)\qquad \int_{Q(\sigma_k)} \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u - (D^\alpha u)_{Q(\sigma_k)}||^2 dX \leq$$

$$\leq 2\int_{Q(\sigma_k)} \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u - (D^\alpha u)_{B(\sigma_k)}||^2 dX +$$

$$+ 2\int_{Q(\sigma_k)} \sum_{|\alpha|=m} ||(D^\alpha u)_{B(\sigma_k)} - (D^\alpha u)_{Q(\sigma_k)}||^2 dX,$$

(7) Il caso $m = 1$ è dovuto a S. Campanato (Comunicazione personale). La dimostrazione che verrà sviluppata è, salvo lievi modifiche, quella relativa al caso $m = 1$.

il problema è ricondotto alla valutazione dei due integrali che figurano nel secondo membro della (3.4).

Grazie alla maggiorazione interpolatoria ([8]).

$$\int_{B(\sigma)} \sum_{i=1}^{n} \|D_i v - (D_i v)_{B(\sigma)}\|^2 dx \leq$$

$$c(n,\vartheta)\left(\sum_{i=1}^{n} |D_i v|^2_{\vartheta,B(\sigma)}\right)^{\frac{1}{1+\vartheta}} \|v - v_{B(\sigma)}\|^{\frac{2\vartheta}{1+\vartheta}}_{0,B(\sigma)},$$

$$\forall v \in H^{1+\vartheta}(B(\sigma), \mathbb{R}^n,\ 0<\vartheta<1,$$

ed alla ipotesi $u \in L^2(-a, 0, H^{m+\vartheta}(B(\sigma), \mathbb{R}^N))$, si ha per q.o.t$\in (t_k^0 - \sigma_k^{2m}, t_k^0)$:

$$\int_{B(\sigma_k)} \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u - (D^\alpha u)_{B(\sigma_k)}\|^2 dx \leq c(n,\vartheta)\left(\sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2_{\vartheta,B(\sigma_k)}\right)^{\frac{1}{1+\vartheta}}$$

$$\cdot \sum_{|\gamma|=m-1} \|D^\gamma u - (D^\gamma u)_{B(\sigma_k)}\|^{\frac{2\vartheta}{1+\vartheta}}_{0,B(\sigma_k)} \leq$$

$$\leq c(n,\vartheta)\left(\sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2_{\vartheta,B(\sigma_k)}\right)^{\frac{1}{1+\vartheta}} \cdot \sum_{|\gamma|=m-1} \|D^\gamma u - (D^\gamma u)_{Q(\sigma_k)}\|^{\frac{2\vartheta}{1+\vartheta}}_{0,B(\sigma_k)},$$

da cui, integrando su $(t_k^0 - \sigma_k^{2m}, t_k^0)$ ed applicando la disuguaglianza di Hölder, segue:

$$\int_{Q(\sigma_k)} \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u - (D^\alpha u)_{B(\sigma_k)}\|^2 dX \leq \tag{3.5}$$

$$\leq c(m,n,\vartheta)\left(\int_{t_k^0-\sigma_m^{2m}}^{t_k^0} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2_{\vartheta,B(\sigma_k)} dt\right)^{\frac{1}{1+\vartheta}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{Q(\sigma_k)} \sum_{|\gamma|=m-1} \|D^\gamma u - (D^\gamma u)_{Q(\sigma_k)}\|^2 dX\right)^{\frac{\vartheta}{1+\vartheta}},$$

([8]) Cfr.: [4], Appendice, Lemma 2.

che è la maggiorazione cercata del primo integrale del secondo membro della (3.4).

Maggioriamo ora l'ultimo integrale della (3.4) facendo uso della seguente disuguaglianza interpolatoria [9]

$$(3.6) \quad \int_{B(\sigma)} \sum_{i=1}^{n} ||D_i v||^2 dx \leq$$

$$\leq c(n, \vartheta) \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} |D_i v|^2_{\vartheta, B(\sigma)} \right)^{\frac{1}{1+\vartheta}} ||v||_{0,B(\sigma)}^{\frac{2\vartheta}{1+\vartheta}} + \sigma^{-2} ||v||^2_{0,B(\sigma)} \right\},$$

$$\forall v \in H^{1+\vartheta}(B(\sigma), \mathbb{R}^n), \; 0 < \vartheta < 1.$$

Risulta, in virtù della (3.6):

$$(3.7) \qquad \int_{Q(\sigma_k)} \sum_{|\alpha|=m} ||(D^\alpha u)_{B(\sigma_k)} - (D^\alpha u)_{Q(\sigma_k)}||^2 dX \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sigma_k^{2m}} \int_{t_k^0 - \sigma_k^{2m}}^{t_k^0} dt \int_{t_k^0 - \sigma_k^{2m}}^{t_k^0} d\xi \int_{B(\sigma_k)} \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u(x,t) - D^\alpha u(x,\xi)||^2 dx \leq$$

$$\leq \frac{c(n,\vartheta)}{\sigma_k^{2m}} \int_{t_k^0 - \sigma_k^{2m}}^{t_k^0} dt \int_{t_k^0 - \sigma_k^{2m}}^{t_k^0} \Bigg\{ \Bigg(\sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x,t) -$$

$$- D^\alpha u(x,\xi)|^2_{\vartheta, B(\sigma_k)} \Bigg)^{\frac{1}{1+\vartheta}} \sum_{|\gamma|=m-1} ||D^\gamma u(x,t) - D^\gamma u(x,\xi)||_{0,B(\sigma_k)}^{\frac{2\vartheta}{1+\vartheta}} +$$

$$+ \sigma_k^{-2} \sum_{|\gamma|=m-1} ||D^\gamma u(x,t) - D^\gamma u(x,\xi)||^2_{0,B(\sigma_k)} \Bigg\} d\xi \leq$$

$$\leq c(m,n,\vartheta) \left(\int_{t_k^0 - \sigma_k^{2m}}^{t_k^0} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2_{\vartheta, B(\sigma_k)} dt \right)^{\frac{1}{1+\vartheta}} \cdot$$

([9]) Cfr.: [4], Appendice, Lemma 1.

$$\cdot\left(\int\limits_{Q(\sigma_k)}\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma u-(D^\gamma u)_{Q(\sigma_k)}\|^2 dX\right)^{\frac{\vartheta}{1+\vartheta}}+$$

$$+\frac{c(n,\vartheta)}{\sigma_k^{2m+2}}\int\limits_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0}dt\int\limits_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0}\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma u(x,t)-D^\gamma u(x,\xi)\|^2_{0,B(\sigma_k)}d\xi.$$

D'altra parte, per l'ipotesi

$$D^\gamma u\in H^{\frac{1+\vartheta}{2m}}(-a,0,L^2(B(\sigma),\mathbb{R}^N)),\quad \forall\gamma:|\gamma|=m-1,$$

si ha:

$$\text{(3.8)}\qquad \frac{c(n,\vartheta)}{\sigma_k^{2m+2}}\int\limits_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0}dt\int\limits_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0}\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma u(x,t)-D^\gamma u(x,\xi)\|^2_{0,B(\sigma_k)}dx=$$

$$=\frac{c(n,\vartheta)}{\sigma_k^{2m+2}}\left(\int\limits_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0}dt\int\limits_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0}d\xi\int\limits_{B(\sigma_k)}\sum_{\gamma|=m-1}\|D^\gamma u(x,t)-D^\gamma u(x,\xi)\|^2dx\right)^{\frac{1}{1+\vartheta}}\cdot$$

$$\cdot\left(\int\limits_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0}dt\int\limits_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0}d\xi\int\limits_{B(\sigma_k)}\sum_{\gamma|=m-1}\|D^\gamma u(x,t)-D^\gamma u(x,\xi)\|^2dx\right)^{\frac{\vartheta}{1+\vartheta}}\le$$

$$\le c(n,\vartheta)\left(\int\limits_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0}dt\int\limits_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0}d\xi\int\limits_{B(\sigma_k)}\sum_{\gamma|=m-1}\frac{\|D^\gamma u(x,t)-D^\gamma u(x,\xi)\|^2}{|t-\xi|^{1+\frac{1+\vartheta}{m}}}dx\right)^{\frac{1}{1+\vartheta}}\cdot$$

$$\cdot\left(\int\limits_{Q(\sigma_k)}\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^\gamma u-(D^\gamma u)_{Q(\sigma_k)}\|^2 dX\right)^{\frac{\vartheta}{1+\vartheta}}.$$

Da (3.7) e (3.8) si deduce allora la maggiorazione dell'ultimo integrale della (3.4)

$$\int_{Q(\sigma_k)} \sum_{|\alpha|=m} ||(D^\alpha u)_{B(\sigma_k)} - (D^\alpha u)_{Q(\sigma_k)}||^2 dX \leq \tag{3.9}$$

$$\leq c(m,n,\vartheta) \left(\int_{Q(\sigma_k)} \sum_{|\gamma|=m-1} ||D^\gamma u - (D^\gamma u)_{Q(\sigma_k)}||^2 dX \right)^{\frac{\vartheta}{1+\vartheta}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \int_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2_{\vartheta, B(\sigma_k)} dt + \right.$$

$$\left. + \int_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0} dt \int_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0} d\xi \int_{B(\sigma_k)} \sum_{|\gamma|=m-1} \frac{||D^\gamma u(x,t) - D^\gamma u(x,\xi)||^2}{|t-\xi|^{1+\frac{1+\vartheta}{m}}} dx \right\}^{\frac{1}{1+\vartheta}}.$$

Dalla (3.4) segue allora, grazie alle (3.5) e (3.9):

$$\int_{Q(\sigma_k)} \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u - (D^\alpha u)_{Q(\sigma_k)}||^2 dX \leq$$

$$\leq c(m,n,\vartheta) \left(\int_{Q(\sigma_k)} \sum_{|\gamma|=m-1} ||D^\gamma u - (D^\gamma u)_{Q(\sigma_k)}||^2 dX \right)^{\frac{\vartheta}{1+\vartheta}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \int_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2_{\vartheta, B(\sigma_k)} dt + \right.$$

$$\left. + \int_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0} dt \int_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0} d\xi \int_{B(\sigma_k)} \sum_{|\gamma|=m-1} \frac{||D^\gamma u(x,t) - D^\gamma u(x,\xi)||^2}{|t-\xi|^{1+\frac{1+\vartheta}{m}}} dx \right\}^{\frac{1}{1+\vartheta}}$$

da cui, posto $q = \dfrac{2(1+\vartheta)(n+2m)}{n+2m-2\lambda\vartheta}$ e facendo uso della λ-hölderianità di

$D^\gamma u(|\gamma| = m-1)$ in $\overline{B(\sigma)\times(-a,0)}$, si deduce

$$\left(\int\limits_{Q(\sigma_k)} \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u - (D^\alpha u)_{Q(\sigma_k)}||dX\right)^q \leq c(m,n,\vartheta,\lambda)(\text{mis}Q(\sigma_k))^{q/2}$$

$$\left(\int\limits_{Q(\sigma_k)} \sum_{|\gamma|=m-1} ||D^\gamma u - (D^\gamma u)_{Q(\sigma_k)}||^2 dX\right)^{\frac{q\vartheta}{2(1+\vartheta)}} \cdot$$

$$\cdot\left\{\int\limits_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2_{\vartheta,B(\sigma_k)}dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0} dt \int\limits_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0} d\xi \int\limits_{B(\sigma_k)} \sum_{|\gamma|=m-1} \frac{||D^\gamma u(x,t) - D^\gamma u(x,\xi)||^2}{|t-\xi|^{1+\frac{1+\vartheta}{m}}}dx\right\}^{\frac{q}{2(1+\vartheta)}} \leq$$

$$\leq c(m,n,\vartheta,\lambda)(\text{mis}Q(\sigma_k))^{q-1}\left(\sum_{|\gamma|=m-1}[D^\gamma u]^2_{\lambda,\overline{B(\sigma)\times(-a,0)}}\right)^{\frac{q\vartheta}{2(1+\vartheta)}} \cdot$$

$$\cdot\left\{\int\limits_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2_{\vartheta,B(\sigma_k)}dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0} dt \int\limits_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0} d\xi \int\limits_{B(\sigma_k)} \sum_{|\gamma|=m-1} \frac{||D^\gamma u(x,t) - D^\gamma u(x,\xi)||^2}{|t-\xi|^{1+\frac{1+\vartheta}{m}}}dx\right\}^{\frac{q}{2(1+\vartheta)}}.$$

e quindi

$$(3.10)\quad (\text{mis}Q((\sigma_k))^{1-q}\left(\int\limits_{Q(\sigma_k)} \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u - (D^\alpha u)_{Q(\sigma_k)}||dX\right)^q \leq$$

$$\leq c(m,n,\vartheta,\lambda)\left(\sum_{|\gamma|=m-1}[D^\gamma u]^2_{\lambda,\overline{B(\sigma)\times(-a,0)}}\right)^{\frac{q\vartheta}{2(1+\vartheta)}}.$$

$$\cdot\left\{\int_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^2_{\vartheta,B(\sigma_k)}dt+\right.$$

$$\left.+\int_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0}dt\int_{t_k^0-\sigma_k^{2m}}^{t_k^0}d\xi\int_{B(\sigma_k)}\sum_{|\gamma|=m-1}\frac{\|D^\gamma u(x,t)-D^\gamma u(x,\xi)\|^2}{|t-\xi|^{1+\frac{1+\vartheta}{m}}}dx\right\}^{\frac{q}{2(1+\vartheta)}}$$

Dalla (3.10), sommando rispetto a K e facendo variare la partizione Δ di $B(\sigma)\times(-a,0)$, segue:

$$K_q(D'u)\le c(m,n,\vartheta,\lambda)\left(\sum_{|\gamma|=m-1}[D^\gamma u]^2_{\lambda,\overline{B(\sigma)\times(-a,0)}}\right)^{\frac{\vartheta}{2(1+\vartheta)}} \tag{3.11}$$

$$\cdot\left\{\int_{-a}^{0}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^2_{\vartheta,B(\sigma)}dt+\right.$$

$$\left.+\int_{-a}^{0}dt\int_{-a}^{0}d\xi\int_{B(\sigma)}\sum_{|\gamma|=m-1}\frac{\|D^\gamma u(x,t)-D^\gamma u(x,\xi)\|^2}{|t-\xi|^{1+\frac{1+\vartheta}{m}}}dx\right\}^{\frac{1}{2(1+\vartheta)}},$$

dove

$$K_q(D'u)=$$

$$=\left\{\sup_{\Delta}\sum_k(\text{mis}Q(\sigma_k))^{1-q}\left(\int_{Q(\sigma_k)}\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha u-(D^\alpha u)_{Q(\sigma_k)}\|dX\right)^q\right\}^{1/q}$$

Dalla (3.11), per un noto Lemma di John-Niremberg (cfr. il Teorema 2.III di [2]), si deduce

$$D^\alpha u\in L^q_{deb}(B(\sigma)\times(-a,0),\mathbb{R}^N),\quad \forall\alpha:|\alpha|=m,$$

e

$$\text{mis}\{X\in B(\sigma)\times(-a,0):\|D'u-(D'u)_{B(\sigma)\times(-a,0)}\|>t\}\le$$

$$\le c(m,n,\vartheta,\lambda)\left(\frac{K_q(D'u)}{t}\right)^q,\quad \forall t>0,$$

da cui

$$D^\alpha u \in L^p(B(\sigma)\times(-a,0),\mathbb{R}^N), \quad \forall\alpha : |\alpha| = m, \quad \forall 1 < p < q, \tag{3.12}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{0} dt \int_{B(\sigma)} \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u - (D^\alpha u)_{B(\sigma)\times(-a,0)}\|^p dx \le \\ \le c(m,n,\vartheta,\lambda,p)[\text{mis}(B(\sigma)\times(-a,0))]^{1-\frac{p}{q}} \cdot \\ \cdot \left(\sum_{|\gamma|=m-1} [D^\gamma u]^2_{\lambda,\overline{B(\sigma)\times(-a,0)}}\right)^{\frac{p\vartheta}{2(1+\vartheta)}} \cdot \left\{\int_{-a}^{0} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2_{\vartheta,B(\sigma)} dt + \right. \\ \left. + \int_{-a}^{0} dt \int_{-a}^{0} d\xi \int_{B(\sigma)} \sum_{|\gamma|=m-1} \frac{\|D^\gamma u(x,t) - D^\gamma u(x,\xi)\|^2}{|t-\xi|^{1+\frac{1+\vartheta}{m}}} dx \right\}^{\frac{p}{2(1+\vartheta)}}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

L'ipotesi $\vartheta > \dfrac{n+2m}{n+2m+4\lambda}$ assicura che $q > 4$, pertanto nelle (3.12) e (3.13) è possibile assumere $p = 4$, ottenendo le (3.2) e (3.3). ■

4. Siamo ora in grado di provare il seguente

TEOREMA (4.1). *Se* $u \in L^2(-T,0,H^m(\Omega,\mathbb{R}^n)) \cap C^0([-T,0], H^{m-1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^N))$ *è una soluzione del sistema (2.5), soddisfacente la (2.6), se valgono le ipotesi (2.2), (2.3), (2.4), e se esiste* $\vartheta \in \left(\dfrac{n+2m}{n+2m+4\lambda}, 1\right)$ *tale che*

$$D^\gamma u \in H^{\frac{1+\vartheta}{2m}}(-a,0,L^2(B(\sigma),\mathbb{R}^N)), \tag{4.1}$$

$$\forall\gamma : |\gamma| = m-1, \ \forall B(\sigma) \subset\subset \Omega, \ \forall a \in (0,T),$$

allora, $\forall B(3\sigma) = B(x^0, 3\sigma) \subset\subset \Omega$, $\forall a, b \in (0,T)$, $a < b$

$$u \in L^2(-a,0,H^{m+1}(B(\sigma),\mathbb{R}^N)) \tag{4.2}$$

e si ha la seguente maggiorazione:

$$\int_{-a}^{0} |D'u|^2_{1,B(\sigma)} dt \leq c(\mu, K, \sigma, b, m, n) \tag{4.3}$$

$$\left\{ 1 + \int_Q \sum_{|\alpha|<m} |f^\alpha|^2 dX + \int_{-b}^{0} dt \int_{B(3\sigma)} \|D'u\|^4 dx \right\}.$$

Dimostrazione. Fissati $B(3\sigma) = B(x^0, 3\sigma) \subset\subset \Omega$ e $a, b \in (0, T)$ con $a < b$; il Teorema (2.1) assicura che, per lo stesso valore di ϑ per cui vale la (4.1), si ha

$$u \in L^2(-b, 0, H^{m+\vartheta}(B(3\sigma), \mathbb{R}^N)).$$

u verifica quindi tutte le ipotesi del Teorema (3.1) ([10]), valgono allora le (3.2) e (3.3) ([10]):

$$D^\alpha u \in L^4(B(3\sigma) \times (-b, 0), \mathbb{R}^N), \quad \forall \alpha : |\alpha| = m, \tag{4.4}$$

$$\int_{-b}^{0} dt \int_{B(3\sigma)} \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u - (D^\alpha u)_{B(3\sigma)\times(-b,0)}\|^4 dx \leq \tag{4.5}$$

$$\leq c(m, n, \vartheta, \lambda)[\text{mis}(B(3\sigma) \times (-b, 0))]^{1-\frac{4}{q}} \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{|\gamma|=m-1} [D^\gamma u]^2_{\lambda, \overline{B(3\sigma)\times(-b,0)}} \right)^{\frac{2\vartheta}{1+\vartheta}} \cdot \left\{ \int_{-b}^{0} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2_{\vartheta, B(3\sigma)} dt + \right.$$

$$\left. + \int_{-b}^{0} dt \int_{-b}^{0} d\xi \int_{B(3\sigma)} \sum_{|\gamma|=m-1} \frac{\|D^\gamma u(x,t) - D^\gamma u(x,\xi)\|^2}{|t-\xi|^{1+\frac{1+\vartheta}{m}}} dx \right\}^{\frac{2}{1+\vartheta}}.$$

Siano $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\rho_\nu(t) \in C^0(\mathbb{R})$, ν intero $> 2/a$, le funzioni reali soddisfacenti le proprietà (2.3) e (2.4) di [6].

([10]) Con b e 3σ al posto di a e di σ, rispettivamente.

Procedendo come nella dimostrazione del Teorema 2.II di [6] si ottiene ([11]):

$$(4.6)\quad \frac{\mu}{2}\int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^{2m}\rho_\nu^2 \|\tau_{i,h} D'u\|^2 dx \leq$$

$$\leq c(\mu, K, \sigma, b, m, n)h^2 \left\{ 1 + \int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(3\sigma)} \|D'u\|^2 dx \right\} +$$

$$+ c(\mu, K) \int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^{2m}\rho_\nu^2 \|D'u\|^2 \, \|\tau_{i,h} D''u\|^2 dx +$$

$$+ c(K) \sum_{|\alpha|<m} \int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(\frac{5}{2}\sigma)} \rho_\nu^2 (|f^\alpha| + \|D'u\|^2) \cdot \|\tau_{i,-h} D^\alpha(\psi^{2m}\tau_{i,h}u)\| dx,$$

con i intero positivo $\leq n$, h numero reale, $|h| < \dfrac{\sigma}{2}$.

Maggioriamo gli ultimi due integrali che figurano al secondo membro della (4.6), cominciando dall'ultimo. Si ha, in virtù della (4.4), del Lemma 2.I di [5], della (3.8) di [4] e di note formule interpolatorie ([12]), per ogni $\varepsilon > 0$:

$$c(K) \sum_{|\alpha|<m} \int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(\frac{5}{2}\sigma)} \rho_\nu^2 (|f^\alpha| + \|D'u\|^2) \|\tau_{i,-h} D^\alpha(\psi^{2m}\tau_{i,h}u)\| dx \leq$$

$$\leq \varepsilon h^{-2} \int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(\frac{5}{2}\sigma)} \rho_\nu^2 \|\tau_{i,-h} D''(\psi^{2m}\tau_{i,h}u)\|^2 dx +$$

$$+ c(K, \varepsilon)h^2 \sum_{|\alpha|<m} \int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(\frac{5}{2}\sigma)} \rho_\nu^2 (|f^\alpha| + \|D'u\|^2)^2 dx \leq$$

([11]) Vedi la (2.30) di [6].

([12]) Cfr.: [3], Cap. I oppure [1], Cap. IV.

$$\leq c(\sigma, m)\varepsilon \int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(3\sigma)} \rho_\nu^2 ||D'(\psi^{2m}\tau_{i,h}u)||^2 dx +$$

$$+ c(K, m, n, \varepsilon)h^2 \left\{ \int_Q \sum_{|\alpha|<m} |f^\alpha|^2 dX + \int_{-b}^{0} dt \int_{B(3\sigma)} ||D'u||^4 dx \right\} \leq$$

$$\leq c(\sigma, m)\varepsilon \int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^{2m}\rho_\nu^2 ||\tau_{i,h}D'u||^2 dx +$$

$$+ c(K, \sigma, b, m, n, \varepsilon)h^2 \left\{ 1 + \int_Q \sum_{|\alpha|<m} |f^\alpha|^2 dX + \right.$$

$$\left. + \int_{-b}^{0} dt \int_{B(3\sigma)} ||D'u||^2 dx + \int_{-b}^{0} dt \int_{B(3\sigma)} ||D'u||^4 dx \right\}$$

da cui, scegliendo convenientemente ε, segue la maggiorazione cercata dell'ultimo termine del secondo membro della (4.6)

$$(4.7) \quad c(K) \sum_{|\alpha|<m} \int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(\frac{5}{2}\sigma)} \rho_\nu^2 (|f^\alpha| + ||D'u||^2) ||\tau_{i,-h} D^\alpha(\psi^{2m}\tau_{i,h}u)|| dx \leq$$

$$\leq \frac{\mu}{4} \int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^{2m}\rho_\nu^2 ||\tau_{i,h}D'u||^2 dx +$$

$$+ c(\mu, K, \sigma, b, m, n)h^2 \left\{ 1 + \int_Q \sum_{|\alpha|<m} |f^\alpha|^2 dX + \int_{-b}^{0} dt \int_{B(3\sigma)} ||D'u||^2 dx + \right.$$

$$\left. + \int_{-b}^{0} dt \int_{B(3\sigma)} ||D'u||^4 dx \right\}.$$

Risulta poi, facendo ancora uso della (4.4) e per il Lemma 2.II di [4]:

$$(4.8)\quad \int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(2\sigma)} \psi^{2m}\rho_\nu^2 \|D'u\|^2 \|\tau_{i,h} D''u\|^2 dx \le$$

$$\le \left(\int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(2\sigma)} \|D'u\|^4 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(2\sigma)} \|\tau_{i,h} D''u\|^4 dx \right)^{1/2} \le$$

$$\le c(m,n)h^2 \left(\int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(3\sigma)} \|D'u\|^4 dx \right)^{1/2} \left\{ \int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(3\sigma)} \|D'u\|^4 dx + \right.$$

$$\left. + \int_{-b}^{-1/\nu} dt \int_{B(3\sigma)} \|D''u\|^4 dx \right\}^{1/2} \le$$

$$\le c(K,\sigma,b,m,n)h^2 \left\{ 1 + \int_{-b}^{0} dt \int_{B(3\sigma)} \|D'u\|^4 dx \right\}.$$

Mediante le (4.7), (4.8) dalla (4.6) si deduce:

$$\int_{-a}^{-2/\nu} dt \int_{B(\sigma)} \|\tau_{i,h} D'u\|^2 dx \le c(\mu,K,\sigma,b,m,n)h^2 \left\{ 1 + \int_Q \sum_{|\alpha|<m} |f^\alpha|^2 dX + \right.$$

$$\left. + \int_{-b}^{0} dt \int_{B(3\sigma)} \|D'u\|^4 dx \right\}$$

da cui, passando al limite per $\nu \to +\infty$ e per un Lemma di Nirenberg (13), segue che, per ogni $\alpha : |\alpha| = m$

$$\exists D_i D^\alpha u \in L^2(-a, 0, L^2(B(\sigma), \mathbb{R}^N)),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

e si ha la maggiorazione (4.3). ■

---

(13) Cfr.: [3] p. 26.

Osservazione (4.1). I Teoremi (3.1) e (4.1) precisano quanto affermato nella nota ([10]) di [6].

Osservazione (4.2). Resta aperto il problema di vedere se il Teorema (4.1) continua a sussistere senza l'ipotesi (4.1).

BIBLIOGRAFIA

[1] Adams R.A., *Sobolev Spaces,* Academic Press, New York, 1975.

[2] Campanato S., *Equazioni paraboliche del secondo ordine e spazi* $\mathcal{L}^{2,\vartheta}(\Omega, \delta)$, Ann. Mat. Pura Appl., **73** (1966), 55-102.

[3] Campanato S., *Sistemi ellittici in forma divergenza. Regolarità all'interno,* Quaderni Scuola Norm. Sup. Pisa, 1980.

[4] Campanato S., Cannarsa P., *Differentiability and Partial Hölder Continuity of the Solutions of Nonlinear Elliptic Systems of Order* $2m$ *with Quadratic Growth,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (4) **8** (1981), 285-309.

[5] Fattorusso L., *Sulla differenziabilità delle soluzioni di sistemi parabolici non lineari del secondo ordine ad andamento quadratico,* Boll. Un. Mat. Ital., (7) **1**-B (1987), 741-764.

[6] Fattorusso L., *Sulla differenziabilità delle soluzioni deboli di sistemi parabolici non lineari di ordine* $2m$ *ad andamento quadratico,* Le Matematiche, **40** (1985), 199-215.

Facoltà di Ingegneria - Università
Via E. Cuzzocrea, 48
89100 Reggio Calabria