LE MATEMATICHE
Vol. LXV (2010) – Fasc. I, pp. 41–52
doi: 10.4418/2010.65.1.3

STRUCTURE D'ALGÈBRES MÉTRISABLES À BASE

R. CHOUKRI - A. EL KINANI - M. OUDADESS

We show that a T-B_0- algebra with an orthogonal basis $(e_i)_{i\geq 0}$ is isomorphic to $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. We also show that there is exactly two m-convex Fréchet algebras with a bounded basis $(e_i)_{i\geq 0}$ satisfying $e_ie_j = e_je_i = e_j$ for all $j \geq i$.

Nous montrons qu'une T-B_0- algèbre à base orthogonale est isomorphe à $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Nous montrons aussi qu'il existe (à isomorphime près) exactement deux algèbres à base bornée possédant la propriètè d'absorption.

1. Introduction

La notion "d'algèbres à base" a été introduite par T. Husain et J. Liang ([5], [6]) dans le cadre de l'étude de la continuité automatique dans les algèbres de Fréchet. Cette notion a également été considérée par M. Akkar, M. El Azhari et M. Oudadess dans [2]. Une étude des algèbres à base orthogonale, indépendemment de la continuité automatique, est faite par T. Husain et S. Watson, dans [7]. C'est dans ce dernier cadre qu'entre le présent travail enrichissant les résultats de [7]. Un résultat de structure est donné dans le cas des B_0-algèbres (Proposition 4.1). Nous obtenons, en particulier, une caractérisation de l'algèbre des suites complexes (Corollaire 4.2). Un théorème de structure est obtenu dans les $a.l.m.c.$ de Fréchet à base semi-orthogonale (Théorème 4.8). Par ailleurs,

Entrato in redazione: 7 ottobre 2009

AMS 2000 Subject Classification: 46H05, 46H20.
Keywords: Base orthogonale, B_0-algèbre, m-convexe.

nous nous sommes aussi intéréssés aux algèbres de Fréchet à base $(e_i)_i$ vérifiant $e_ie_j = e_je_i = e_j$, pour tous $i,\ j$ tel que $j \geq i$. Nous avons montré qu'il n'existe, à isomorphisme algébrique et topologique près, que deux structures de telles algèbres moyennant l'hypothèse de la bornitude de la base (Théorèmes 5.3 et 5.5). Enfin, il a été démontré dans [1] qu'une $a.l.m.c.$ de Fréchet à base $(e_i)_i$ vérifiant $e_ie_j = e_je_i = e_j$ pour tous $j \geq i$ et admettant une famille de semi-normes sous-multiplicatives $(p_i)_{i\geq 0}$ vérifiant $p_i(e_i) \neq 0$ et $p_i(e_{i+1}) \neq 0$, est isomorphe à $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Nous donnons de ce fait une preuve différente, simple et beaucoup plus courte (Théorème 5.6).

2. Préliminaires

Le radical de Jacobson d'une algèbre commutative A, noté $RadA$, est l'intersection des idéaux maximaux réguliers de A. L'algèbre A est dite semi-simple si $RadA = \{0\}$. Le spectre dans A d'un élément x est :

$$Sp_Ax = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \notin G(A^1)\},$$

où A^1 est l'unitisée de A et e l'unité de A^1. Le rayon spectral de x dans A est :

$$\rho_A(x) = \sup_{\lambda \in Sp_A(x)} |\lambda|.$$

L'algèbre A est dite topologique si elle est munie d'une topologie d'espace vectoriel pour laquelle le produit est séparément continu. Une telle algèbre topologique est dite localement multiplicativement convexe ($a.l.m.c.$) si sa topologie est définie par une famille $(p_\lambda)_\lambda$ de semi-normes sous-multiplicatives, i.e.,

$$p_\lambda(xy) \leq p_\lambda(x)p_\lambda(y),\ \ \forall x,y \in A,\ \ \forall \lambda.$$

Elle est dite, en plus, de Fréchet si elle est métrisable complète. Une algèbre localement convexe métrisable complète est dite une B_0-algèbre. Une algèbre topologique est dite une Q-algèbre si l'ensemble de ses éléments quasi-inversibles est ouvert. Un élément x d'une algèbre topologique commutative A est dit topologiquement inversible si $\overline{Ax} = A$. Celle-ci est dite une T-algèbre si tout élément topologiquement inversible est inversible.

Un espace vectoriel topologique est dit à base (de Schauder) s'il existe une suite $(e_i)_{i\geq 0}$ d'éléments de E tel que pour tout $x \in E$, il existe une suite unique $(\alpha_i) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que

$$x = \sum_{i\geq 0} \alpha_i e_i.$$

Si, de plus, la série $\sum_{i\geq 0} \alpha_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)}$ est convergente, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, on dira que la base $(e_i)_{i\geq 0}$ est inconditionnelle. Si E est une algèbre, la base $(e_i)_{i\geq 0}$ est dite orthogonale si, pour tout couple (i, j), on a

$$e_i e_j = \delta_{ij} e_j, \text{ où } \delta_{ij} \text{ est le symbole de Kronecker.}$$

Dans ce cas, pour tout $k \geq 0$, on notera par χ_k le caractère de E défini par :

$$\chi_k(x) = \alpha_k, \text{ pour tout } x = \sum_{i\geq 0} \alpha_i e_i \in A.$$

On notera par φ l'application, de A vers $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, définie par :

$$\varphi(x) = ((\chi_n(x))_n, \text{ pour tout } x \in A.$$

On dira que la base $(e_i)_{i\geq 0}$ possède la propriété d'absorbtion si

$$e_i e_j = e_j e_i = e_j, \quad \forall j \geq i.$$

Dans ce cas, on notera χ'_k le caractère de E défini par

$$\chi'_k(x) = \sum_{i\leq k} \alpha_i, \text{ pour tout } x = \sum_{i\geq 0} \alpha_i e_i \in A.$$

Soit l'application ψ définie de A vers $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par :

$$\psi(x) = (\chi'_n(x))_n, \text{ pour tout } x \in A.$$

Il est clair que φ et ψ sont des morphismes d'algèbres injectifs.

$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ désigne l'algèbre de toutes les suites complexes. Munie de la topologie produit, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ devient une *a.l.m.c.* de Fréchet. On désigne par $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ (resp. $\mathbb{C}_0^{\mathbb{N}}$) l'algèbre de Banach des suites complexes convergentes (resp. tendant vers 0).

Dans ce qui suit, toutes les algèbres topologiques considérées sont localement convexes et métrisables.

3. Algèbres topologiques à base

Nous commençons par la proposition suivante regroupant des résultats généraux.

Proposition 3.1. *Soit A une algèbre topologique à base $(e_i)_{i\geq 0}$ orthogonale. Alors*

i) L'algèbre A/I est semi-simple, pour tout idéal fermé I de A.

ii) Pour tout $x \in A$, on a $\overline{Ax^2} = \overline{Ax}$.

iii) Les χ_k sont les caractères continus de A.

iv) Tout $x \in A$ est topologiquement inversible si, et seulement si, $\chi_k(x) \neq 0$, pour tout k.

Démonstration. i) Soit $\overline{x} \in Rad(A/I)$. Posons $x = \sum_{i \geq 0} \alpha_i e_i$ et considérons i tel que $e_i \notin I$. On a

$$\overline{e_i x} = \alpha_i \overline{e_i} \in Rad(A/I).$$

Comme $\overline{e_i}$ est un idempotent non nul, il ne peut être dans $Rad(A/I)$. Donc $\alpha_i = 0$. Par suite $\overline{x} = \overline{0}$.

ii) Découle de i).

iii) On montre aisément que les χ_k sont bien des caractères continus de A. Réciproquement, soit χ un caractère continu de A. Il existe k tel que $\chi(e_k) \neq 0$. Alors nécessairement $\chi(e_i) = 0$, pour tout $i \neq k$. Il en résulte alors que $\chi = \chi_k$.

iv) Supposons que $\chi_k(x) \neq 0$, pour tout k. Alors Ax contient e_k pour tout k. D'où la densité de l'idéal Ax dans A. La réciproque découle de iii). □

Remarque 3.2. Dans la proposition précédente, le quotient de A par un idéal non fermé n'est pas nécessairement semi-simple. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'algèbre vérifie

$$Ax = Ax^2, \ \ \forall x \in A.$$

C'est le cas, par exemple, pour l'algèbre $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Une étude détaillée de telles algèbres se trouve dans [3].

Notons que l'unitisée d'une algèbre à base orthogonale n'est pas nécessairement à base orthogonale comme le montre l'exemple suivant : Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. D'après ([8], Théorème 5.2, p.321), il existe une structure d'algèbre à base orthogonale sur H. Son unitisée ne pourra être à base orthogonale, car sinon, elle serait isomorphe à l'algèbre $C^{\mathbb{N}}$ ([7], Théorème 3.4, p.345), ce qui ne pourrait être le cas.

Mais la complétion conserve la propriété. On a l'énoncé plus précis suivant.

Proposition 3.3. *Soit $(e_i)_{i \geq 0}$ une base orthogonale d'une algèbre topologique unitaire A. Alors $(e_i)_{i \geq 0}$ est également une base orthogonale de la complétée $\widehat{A}$ de A.*

Démonstration. Notons d'abord qu'on a nécessairement $e = \sum_{i \geq 0} e_i$, où e est l'unité de A. Soit $x \in \widehat{A}$ et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de A convergeant vers x.

Posons, pour tout n,

$$x_n = \sum_{i \geq 0} \alpha_{i,n} e_i$$

Par **iii)** de la Proposition 3.1**,** on a $\alpha_{i,n} \longrightarrow \alpha_i$. Par ailleurs,

$$\alpha_{i,n} e_i = e_i x_n \longrightarrow e_i x = \alpha_i e_i.$$

Il en résute que

$$x = \sum_{i \geq 0} \alpha_i e_i.$$

Contrairement à $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, qui n'est pas une Q-algèbre, $\mathbb{C}_0^{\mathbb{N}}$ en est une. La proposition suivante montre qu'en un sens, c'est la plus grande algèbre topologique à base orthogonale et qui est auusi une Q-algèbre. □

Proposition 3.4. *Soit A une algèbre topologique qui est une Q-algèbre, à base orthogonale $(e_i)_{i \geq 0}$. Alors il existe un isomorphisme continu de A sur une sous-algèbre de $\mathbb{C}_0^{\mathbb{N}}$.*

Démonstration. Soit $x = \sum\limits_{i \geq 0} \alpha_i e_i \in A$. On a $\alpha_i e_i \longrightarrow 0$. Donc, vu que A est une Q-algèbre, $\rho_A(\alpha_i e_i) \longrightarrow 0$. Par suite $|\alpha_i| \longrightarrow 0$, puisque $\rho_A(e_i) = 1$. Ainsi le morphisme φ (cf. Préliminaires) est à valeur dans $\mathbb{C}_0^{\mathbb{N}}$. Et il est clair qu'il est continu. □

4. Algèbres de Fréchet à base

Nous étendons le résultat principal de [1] à une classe d'algèbres plus vaste. En effet, on ne suppose pas ici que l'algèbre est m-convexe. De plus, notre preuve est transparente et bien plus courte.

Proposition 4.1. *Soit A une B_0-algèbre unitaire à base orthogonale $(e_i)_{i \geq 0}$. On suppose que A est une T-algèbre. Alors,*

$$A \simeq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

Démonstration. Il est aisé de montrer que le morphisme φ (voir Préliminaires) est continu. Montrons que φ est surjectif. Soit $(\alpha_i)_{i \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour tout i, il existe un entier p_i tel que :

$$\frac{1}{p_i(|\alpha_i| + 1)} \leq \frac{1}{2^i}.$$

Il en résulte que la série

$$\sum_{i \geq 0} \frac{1}{p_i(|\alpha_i| + 1)} e_i$$

est absolument convergente et donc convergente. Notons x sa somme. Par **iv)** de la Proposition 3.1, x est topologiquement inversible. Il est donc inversible, par hypothèse. Alors la série

$$\sum_{i\geq 0} p_i(|\alpha_i|+1)e_i$$

est convergente. Par suite, il en est de même de

$$\sum_{i\geq 0}(|\alpha_i|+1)e_i$$

D'où la convergence de la série

$$\sum_{i\geq 0}(|\alpha_i|)e_i,$$

puis celle de

$$\sum_{i\geq 0}\alpha_i e_i.$$

Comme conséquence, nous avons le résultat suivant : □

Corollaire 4.2. *([7], théorème 3.4, p.345). Soit A une a.l.m.c. de Fréchet unitaire à base orthogonale. Alors A est isomorphe à* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Démonstration. Une telle algèbre est une T-algèbre ([9], Théorème 5.2, p.21). On conclut par la Proposition 4.1. □

Nous avons également le résultat suivant dans le cas m-convexe non nécessairement complet.

Corollaire 4.3. *Toute algèbre m-convexe unitaire séparée et à base orthogonale est isomorphe algébriquement et topologiquement à une sous-algèbre de* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Démonstration. La complétée d'une telle algèbre est à base orthogonale d'après la Proposition 3.3. Le corollaire 4.2 permet de conclure. □

Remarque 4.4. Une *a.l.m.c.* de Fréchet à base orthogonale et qui est une Q-algèbre peut être munie d'une norme d'algèbre. Voici une réciproque. Mais d'abord le lemme suivant.

Lemma 4.5. *Il n'existe aucune norme d'algèbre sur* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Démonstration. Soit p une norme d'algèbre sur $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Comme, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}x = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}x^2$, pour tout $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, l'algèbre normée $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, p)$ est une Q-algèbre ([3]). Donc le spectre de tout élément de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ doit être borné. Ce qui n'est pas le cas. □

Proposition 4.6. *Soit A une a.l.m.c. de Fréchet à base orthogonale. Si A peut être munie d'une norme d'algèbre, alors A est une Q-algèbre.*

Démonstration. Soit $x = \sum\limits_{i\geq 0} \alpha_i e_i \in A$. Supposons que $(\alpha_i)_i$ n'est pas bornée. Alors il existe une suite $(\alpha_{i_k})_k$ extraite de $(\alpha_i)_i$ tel que $\alpha_{i_k} \longrightarrow \infty$. Il en résulte que $e_{n_k} \longrightarrow 0$. Considérons

$$B = \{x = \sum_{i\geq 0} \beta_i e_i \in A : \beta_i = 0,\ \forall i \notin \{n_k : k \geq 0\}\}.$$

B est une sous-algèbre fermée de A. Elle est unitaire, d'unité $\sum\limits_{k\geq 0} e_{n_k}$. Par le Corollaire 4.2, B est isomorphe à $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Cette dernière serait alors normée, ce qui ne peut être le cas vu le lemme 4.6. Ainsi $(\alpha_i)_i$ est bornée et donc A est une Q-algèbre d'après ([10], Corollaire 3, p.296).

$\square$

Nous terminons cette section par un résultat de structure des *a.l.m.c.* de Fréchet à base semi-orthogonale. Pour cela, rappelons d'abord la définition suivante.

Définition 4.7. ([7], 1.i), p.340)**.** Une base $(e_i)_{i\geq 0}$ d'une algèbre topologique est dite semi-orthogonale si,

$$e_i e_j = 0,\ \ \forall i \neq j.$$

Voici un résultat de structure généralisant celui obtenu dans le cas des bases orthogonales (Proposition 4.1).

Théorème 4.8. *Soit A une a.l.m.c. de Fréchet à base semi-orthogonale* $(e_i)_{i\geq 0}$*. On suppose que* $e_n \to 0$*. Alors*

$$A \simeq \mathbb{C}^n \times RadA\ (n \in \mathbb{N}) \quad ou \quad A \simeq \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \times RadA.$$

Démonstration. Posons :

$$I = \{i \in \mathbb{N} : e_i \notin Rad(A)\}.$$

Quitte à remplacer e_i par $\alpha_i e_i$ avec un $\alpha_i \in \mathbb{C}$ convenable, on peut supposer que $e_i^3 = e_i^2$ pour tout $i \in I$. Si p est une semi-norme sous-multiplicative sur A, alors, vu que $e_n \longrightarrow 0$, il existe une partie J finie de I telle que $p(e_i^2) = 0$ pour tout $i \in I\backslash J$. Il en résulte que, pour tout $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$, la série $\sum\limits_{i\in I} \alpha_i e_i^2$ est convergente. D'où le morphisme

$$\phi : \mathbb{C}^I \longrightarrow A$$

défini par
$$\phi((\alpha_i)) = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i^2, \text{ pour tout } (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I.$$

Il est injectif. Donc ϕ est un isomorphisme algébrique et topologique de $\mathbb{C}^I$ sur $Im\phi$. Ce dernier est alors fermé et, de plus, c'est un idéal de A. Par ailleurs, pour tout $i \in I$, $e_i^2 - e_i \in RadA$. Ainsi on a :

$$Im\phi + RadA = A \text{ et } Im\phi \cap RadA = \{0\}.$$

Par suite
$$A \simeq Im\phi \times RadA \simeq \mathbb{C}^I \times RadA.$$

D'où le résultat, en distinguant les cas I fini et I infini. □

5. Algèbres à base possédant la propriété d'absorbtion

Moyennant une propriété topologique sur la base, nous obtenons exactement deux structures d'$a.l.m.c.$ de Fréchet à base possédant la propriété d'absorbtion.

Nous commençons d'abord par donner les deux exemples suivants.

Exemple 5.1. Pour tout k, posons

$$e_k = (0,...,0,1,1,....) \quad (k \text{ zéros}).$$

Il est facile de voir que $(e_k)_{k\geq 0}$ est une base inconditionnelle de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et également de $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$. Remarquons que, dans les deux exemples, la suite $(e_k)_k$ est bornée et que, dans le premier exemple, elle tend vers 0. Dans ce qui suit, nous montrons, qu'à isomorphisme algébrique et topologique près, ils sont les seuls.

Lemma 5.2. *Soit A une $a.l.m.c.$ de Fréchet à base $(e_i)_{i\geq 0}$ orthogonale. Alors, les caractères continus de A, à l'exception d'au plus un, sont exactement les χ_k', $k \geq 0$.*

Démonstration. D'abord les χ_k' sont bien des caractères continus de A. Soit maintenant χ un caractère continu de A. Supposons que χ s'annule en un certain e_i. Alors, en posant,

$$i_0 = \min\{j \in \mathbb{N} : \chi(e_j) = 0\},$$

on obtient que $\chi = \chi_{i_0}$. Supposons maintenant que χ ne s'annule en aucun e_i. Comme les e_i sont idempotents, on a nécessairement, $\chi(e_i) = 1$, pour tout i. D'où le lemme. □

Voici le premier thèorème de structure de cette section.

Théorème 5.3. *Soit A une T-B_0-algèbre à base $(e_i)_{i\geq 0}$ possédant la propriété d'absorbtion. On suppose que $e_n \longrightarrow 0$. Alors :*

$$A \simeq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

Démonstration. Pour tout i, posons $f_i = e_i - e_{i+1}$ et

$$B = \{x \in A,\ \exists((\alpha_i) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : x = \sum_{i\geq 0} \alpha_i f_i\}.$$

Il est facile de voir que $f_i f_j = \delta_{i,j} f_j$. Ainsi l'algèbre B est à base orthogonale. De plus, elle est unitaire vu que $\sum_{i\geq 0} \alpha_i f_i = e_0$ (l'unité de A). D'après la Proposition 3.3 l'algèbre $\overline{B}$, qui est égale à A, est également à base orthogonale. Donc, par la Proposition 4.1, $A \simeq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Par le Lemme 5.2, le morphisme ψ (voir préliminaires) est continu. Reste à montrer qu'il est surjectif. Soit $(\beta_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ et p une semi-norme sous-multiplicative continue sur A. Comme $e_n \longrightarrow 0$, il existe n_0 tel que $p(e_{n_0}) < 1$ et par suite $p(e_{n_0}) = 0$ vu que e_{n_0} est un idempotent. Il en résulte que $p(e_n) = 0$ pour tout $n \geq n_0$. D'où la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \alpha_n e_n$, où $\beta_0 = \alpha_0$ et $\beta_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}$, pour $n \geq 1$. Et il est clair que

$$\psi(\sum_{n\geq 0} \alpha_n e_n) = (\beta_n)_n.$$

□

Comme conséquence, nous retrouvons le résultat suivant.

Corollaire 5.4. *([1], Proposition 3.7, p.250). Soit A une a.l.m.c. de Fréchet à base $(e_i)_{i\geq 0}$ possédant la propriété d'absorbtion. On suppose que $e_n \longrightarrow 0$. Alors :*

$$A \simeq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

Voici maintenant le second thèorème de structure où on impose à la base d'être bornée.

Théorème 5.5. *Soit A une a.l.m.c. de Fréchet à base inconditionnelle bornée $(e_i)_{i\geq 0}$, possédant la propriété d'absorbtion. On suppose que $(e_n)_n$ ne converge pas vers 0. Alors :*

$$A \simeq \mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}.$$

Démonstration. Soit $x = \sum_{i\geq 0} \alpha_i e_i \in A$. Montrons que la série $\sum_{i\geq 0} \alpha_i$ est convergente. Soit p, q deux entiers naturels tels que $p \leq q$. On a

$$(\sum_{p\leq i\leq q} \alpha_i) e_q = (\sum_{p\leq i\leq q} \alpha_i e_i) e_q.$$

Il en résulte que :

$$\Big(\sum_{p\le i\le q}\alpha_i\Big)e_q \underset{p,q\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Supposons que $(\sum_{p\le i\le q}\alpha_i)$ ne tend pas vers 0 quand $p,q\to+\infty$. Alors il existe deux suites strictement croissantes (p_n) et (q_n) avec $p_n\le q_n$ tel que :

$$\inf_n \left|\sum_{p_n\le i\le q_n}\alpha_i\right| > 0.$$

Il en résulte que $e_{q_n}\to 0$. Par suite $e_n\to 0$, contrairement à notre hypothèse. D'où la convergence de la série $\sum_{i\ge 0}\alpha_i$. L'application ψ (voir préliminaires) est alors à valeur dans $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$. Par ailleurs, la base étant inconditionnelle, la série $\sum_{i\ge 0}|\alpha_i|$ est également convergente (cf.[4]). On montre alors facilement que :

$$Im\psi = \{(\beta_n)_{n\ge 0} : \sum_{n\ge 0}|\beta_{n+1}-\beta_n| < \infty\}.$$

L'algèbre $Im\psi$ est de Banach pour la norme

$$\|(\beta_n)_{n\ge 0}\| = |\beta_0| + \sum_{n\ge 0}|\beta_{n+1}-\beta_n|.$$

Ainsi, ψ est un isomorphisme algébrique et topologique de A sur B, où

$$B = \{(\beta_n)_{n\ge 0}\in\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}} : \sum_{n\ge 0}|\beta_{n+1}-\beta_n| < \infty\},$$

munie de la norme de Banach ci-dessus. Par ailleurs $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$, qui est bien une *a.l.m.c.* de Fréchet à base $(e_i)_{i\ge 0}$ possédant la propriété d'absorbtion est isomorphe à B. D'où l'isomorphisme entre A et $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$.

□

Nous terminons ce travail en donnant une autre preuve, moins calculatoire, du résultat principal de [1].

Théorème 5.6. *Soit A une a.l.m.c. de Fréchet admettant une base $(e_i)_{i\ge 0}$ possédant la propriété d'absorbtion. On suppose qu'il existe une famille croissante $(p_i)_{i\ge 0}$ de semi-norme, sous-multiplicatives, telle que*

$$p_i(e_i)\ne 0,\ p(e_{i+1}) = 0, \textit{ pour tout } i.$$

Alors A est isomorphe à $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Démonstration. Soit $i \in \mathbb{N}$. L'idéal Ae_i est fermé puisque e_i est un idempotent. De plus, il contient e_j pour tout $j \geq i$. Il en résulte que Ae_i est de codimension finie. Plus précisement, sa codimension est égal à i. Par ailleurs, on a : $Ae_{i+1} \subset \ker p_i$. En raisonnant sur les codimensions, on obtient $Ae_{i+1} = \ker p_i$. D'autre part, l'algèbre quotient $A/\ker p_i$ est semi-simple. Ainsi $A/\ker p_i$ est isomorphe à $\mathbb{C}^i$. Mais on sait que

$$A = \varprojlim A/\ker p_i,$$

(cf. [9], Théorème 5.1, p.20). Donc A est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Akkar - M. El Azhari - M. Oudadess, *Théorèmes de structure sur certaines algèbres de Fréchet*, Ann. Sc. Math. Québec 11 (2) (1987), 245–252.

[2] M. Akkar - M. El Azhari - M. Oudadess, *Continuité des caractères dans les algèbres de Fréchet à bases*, Canad. Math. Bull. 31 (2) (1988), 168–174.

[3] R. Choukri - A. EL Kinani - M. Oudadess, *Etude des algèbres topologiques A vérifiant $Ax = Ax^2$ ou $xAx = x^2Ax^2$*, General Topological Algebras, Mati Abel Editeur, Estonian Math. Soc., Tartu (2001), 59–71.

[4] M. M. Day, *Normed linear spaces*, third edition, Springer-Verlag Berlin - Heidelberg - New York, 1973.

[5] T. Husain - J. Liang, *Multiplicative functionals on Fréchet algebras with bases*, Can. J. Math. 29 (2) (1977), 270–276.

[6] T. Husain - J. Liang, *Continuity of multiplicative linear functionals on Fréchet algebras with bases*, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège 46 (1977), 8–11.

[7] T. Husain - S. Watson, *Topological algebras with orthogonal Schauder bases*, Pacif. J. Math. 91 (2), (1980), 339–347.

[8] T. Hussain, *Orthogonal primitive idempotents and Banach algebras isomorphic with l_2*, Pacific J. Math. 117 (1956), 313-327.

[9] E. A. Michael, *Locally multiplicatively convex topological algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. 11, 1952.

[10] W. Zelazko, *On maximal ideals in commutative m-convex algebras*, Studia Mathematica, 58 (1976), 291–298.

R. CHOUKRI
Département de Mathématiques,
Ecole Normale Supérieure,
B.P, 5118, Rabat, 10105, Maroc.
e-mail: rachoukri@yahoo.fr

A. EL KINANI
Département de Mathématiques,
Ecole Normale Supérieure,
B.P, 5118, Rabat, 10105, Maroc.
e-mail: abdellah_ elkinani@yahoo.fr

M. OUDADESS
Département de Mathématiques,
Ecole Normale Supérieure,
B.P, 5118, Rabat, 10105, Maroc.
e-mail: oudadessm@yahoo.fr