LE MATEMATICHE
Vol. LXIII (2008) – Fasc. II, pp. 57–61

STRUCTURE DES Q–F–ALGÈBRES A VÉRIFIANT $Ax = xAx$, POUR TOUT $x \in A$

RACHID CHOUKRI - ABDELLAH EL KINANI

We give a complete characterization of Q-F-algebras A which satisfy $Ax = xAx$ for every $x \in A$.

1. Introduction

Soit A une algèbre unitaire. Un idéal bilatère P de A, distinct de A, est dit premier si pour tous $a, b \in A$ vérifiant $aAb \subset P$, on a $a \in P$ ou $b \in P$. Ce qui équivaut à dire que, pour tous idéaux bilatères I et J de A tel que $IJ \subset P$, on a $I \subset P$ ou $J \subset P$. L'algèbre A est dite noethérienne (à droite) si la famille de ses idéaux à droites satisfait la condition de la chaine ascendante. On dira que A est une F-algèbre si elle est munie d'une topologie d'algèbre qui est métrisable et complète. Une telle algèbre est dite de Fréchet si sa topologie peut être définie par une famille de semi-normes sous-multiplicatives. Une F-algèbre dont le groupe des éléments inversibles est ouvert est dite une Q-F-algèbre. Rappelons enfin qu'un espace topologique séparé non vide (E, τ) est dit de Baire, si pour chaque suite $(A_n)_n$ de fermés de (E, τ) d'intérieurs vides, la reunion A des A_n a un intérieur vide. Dans toute la suite et sauf mention du contraire, les algèbres considérées sont réelles, $\mathbb{H}$ désignera l'algèbre des quaternions réelles et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Entrato in redazione: 28 febbraio 2008

AMS 2000 Subject Classification: 46J40
Keywords: Q-algebre, F-algebre, algèbre de Fréchet, idéal bilatère, idéal premie, idéal maximal, algèbre noethérienne.

l'algèbre des suites complexes. On munit $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de la topologie munie topologie produit. Elle devient ainsi une F-algèbre de Fréchet.

Dans une algèbre de Banach complexe unitaire, C. Le Page ([3]) a considéré la condition suivante :

$$Ax = Ax^2, \text{ pour tout } x \in A \tag{1}$$

Il a montré qu'une telle algèbre est semi-simple et commutative. J. Duncan et A. W. Tullo ([1]) ont montré qu'elle est en fait de dimension finie. Ce sont J. Esterle et M. Oudadess ([2]) qui ont donné une description complète de toute algèbre de Banach complexe A vérifiant (1) ; elle est de la forme $\mathbb{C}^n \oplus RadA$, avec n un entier naturel. Dans cette note, nous considérons la condition

$$Ax = xAx, \text{ pour tout } x \in A \tag{2}$$

dans un cadre beaucoup plus général. Nous montrons (Théorème 2.1) que, pour qu'une Q-F-algèbre unitaire A vérifie la condition (2), il faut, et il suffit, que A soit algèbriquement et topologiquement isomorphe à un produit fini de F-algèbres qui sont des corps. Comme conséquence, nous obtenons (Corollaire 2.4) qu'une algèbre de Banach réelle unitaire vérifie la condition (2), si, et seulement, si elle est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{H}^t$, où r, s et t sont des entiers. Dans le cas non nécessairement Q-algèbre, nous montrons (Théorème 2.7) que si A est une F-algèbre de Fréchet complexe de dimension infinie et vérifiant (2), alors elle est algèbriquement et topologiquement isomorphe à l'algèbre $\mathbb{C}^N$.

2. Résultats principaux

Il est clair qu'une algèbre, non nécessairement topologique, qui est isomorphe à un produit fini de corps vérifie la condition (2). La réciproque, qui est fausse en général, est vraie dans une grande classe d'algèbres topologiques comme le montre le théorème suivant.

Théorème 2.1. *Soit A une Q-F-algèbre unitaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) A vérifie la condition (2).

ii) A est algèbriquement et topologiquement isomorphe à un produit fini de F-algèbres qui sont des corps.

Démonstration. L'implication ii) $\Longrightarrow$ i) est claire. Pour la réciproque, nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemma 2.2. *Soit A une algèbre unitaire non nécessairement topologique vérifiant la condition (2). Alors :*

i) Tout idéal à droite de A, distinct de A, est bilatère. De plus, il est égal à l'intersection de tous les idéaux à droite maximaux de A le contenant.

ii) A est semi-simple.

iii) Le quotient de A par tout idéal premier est un corps.

Démonstration. i) Soit I un idéal à droite de A, distinct de A. La condition (2) implique que I est nécessairement bilatère. Montrons la deuxième assertion. Considérons $x \in A\backslash I$ et $a \in A$ tel que $x = xax$. On a $x(e-ax) = 0$. L'idéal à droite $I+(e-ax)A$ est distinct de A. Il est donc contenu dans un idéal à droite maximal M de A. Cet idéal ne peut contenir x. D'où le résultat.
ii) Conséquence immédiate de i).
iii) Soit P un idéal premier et $x \in A\backslash P$. Considérons $a \in A$ tel que $x = xax$. On a $x(e-ax) = 0$. Par ailleurs,

$$xA(e-ax) = x(e-ax)A(e-ax) = \{0\}.$$

Il en résulte que $e-ax \in P$. □

Lemma 2.3. *Soit A une F-algèbre à idéaux à droites fermés. Alors A est noethérienne.*

Démonstration. Découle du fait que l'algèbre, qui est métrisable complète, est un espace de Baire. □

Preuve du théorème 2.1. Comme A est une Q-algèbre, tout idéal à droite maximal de A est fermé. Il en résulte, par i) du Lemme 2.2, que tout idéal à droite de A est fermé. D'après le Lemme 2.3, A est noethérienne. On va montrer que tout idéal à droite de A contient un produit fini d'idéaux premiers. Sinon, vu que A est noethérienne, il existerait un idéal à droite P maximal n'ayant pas la propriété citée ci-dessus. Un tel idéal est nécessairement premier. En effet, soit I et J deux idéaux bilatères de A tel que $IJ \subset P$. Comme $P+I$ et $P+J$ contiennent P et leur produit est contenu dans P, l'un d'eux doit coincider avec P. Ainsi I ou J est contenu dans P. D'où la primalité de P, ce qui ne peut être le cas. Ainsi, en particulier, l'idéal nul contient un produit $P_1 \ldots P_r$, où les P_i sont des idéaux premiers de A deux à deux distincts. Il résulte de iii) du Lemme 2.2, que le morphisme canonique de

$$A \to A/P_1 \times \ldots \times A/P_r$$

induit un isomorphisme de

$$A/P_1 \cap \ldots \cap P_r \text{ sur } A/P_1 \times \ldots \times A/P_r.$$

Cet isomorphisme, qui est continu, est bien bicontinu par le théorème de l'application ouverte. Par ailleurs, d'après iii) du Lemme 2.2, les P_i sont les seuls idéaux à droite maximaux de A. Donc, par ii) du même lemme, on a

$$P_1 \cap \ldots \cap P_r = \{0\}.$$

D'où le résultat. □

En utilisant le théorème de Gelfand Mazur, nous obtenons comme conséquences, les résultats suivants.

Corollaire 2.4. *Pour qu'une algèbre de Banach réelle unitaire A vérifie la condition (2) il faut, et il suffit, qu'elle soit isomorphe à l'algèbre* $\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{H}^t$*, pour certains entiers* r*,* s *et* t*.*

Corollaire 2.5. *Pour qu'une algèbre de Banach complexe unitaire vérifie la condition (2) il faut, et il suffit, qu'elle soit isomorphe à l'algèbre* $\mathbb{C}^r$*, pour un certain entier* r*.*

Remarque 2.6. Le théorème 2.1 ne reste plus vrai sans la Q-propriété. En effet, soit A l'algèbre des classes de fonctions complexes mesurables sur l'intervalle $[0,1]$. Munie de la topologie de la convergence en mesure, A devient une F-algèbre. De plus, elle vérifie la condition (2). Mais elle n'est pas isomorphe à un produit fini d'algèbre qui sont des corps (ce produit est nécessairement une Q-algèbre). Cependant, dans le cas Fréchet, on a le résultat suivant :

Théorème 2.7. *Soit* A *une* F*-algèbre complexe de Fréchet et de dimension infinie. Si* A *vérifie la condition (2), alors* A *est algébriquement et topologiquement isomorphe à l'algèbre* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$*.*

Démonstration. Pour la preuve, nous aurons besoin du lemme suivant dont la preuve ne présente aucune difficulté.

Lemma 2.8. *Toute algèbre unitaire normée vérifiant la condition (2) est une* Q*-algèbre.*

Preuve du théorème 2.7. Soit $(|.|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de semi-normes sous-multiplicatives définissant la topologie de A. Alors, pour tout n, la topologie quotient, sur l'algèbre $A_n = A/\ker|.|_n$, est de Fréchet et plus fine que celle définie par la norme induite par $|.|_n$. De plus, l'algèbre A_n vérifie la condition (2). Donc, par le Lemme 2.8, A_n est une Q-algèbre. Par le théorème 2.1, il existe un entier r_n tel que A_n est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{C}^{r_n}$. D'où, d'après ([4], Théorème 5.1, p.20), A est la limite projective des A_n. D'où le résultat. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Duncan - A. W. Tullo, *Finite dimensionality nilpotents and quasinilpotents in Banach algebras*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 19 (1974/75), 45–49.

[2] J. Esterle - M. Oudadess, *Structures of Banach algebras A satisfying* $Ax^2 = Ax$, *for every* $x \in A$, Proc. Amer. Math. Soc. (1) 96 (1986), 91–94.

[3] C. Le Page, *Sur quelques conditions entraînant la commutativité dans les algèbres de Banach*, C. R. Acad. Sci. Paris. (Ser A-B), 265 (1967), 235–237.

[4] A. Michael, *Locally multiplicatively convex topological algebra*, Mem. Amer. Math. Soc. 11, Providence 1952.

RACHID CHOUKRI
Ecole Normale Supérieure
B. P. 5118, Rabat, 10105
Maroc
e-mail: rachoukri@yahoo.fr

ABDELLAH EL KINANI
Ecole Normale Supérieure
B. P. 5118, Rabat, 10105
Maroc
e-mail: abdellah_elkinani@yahoo.fr